

74.26
Ш16

И.В.Шадрина

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ в начальных классах

МАТЕМАТИКА

Пособие для учителей,
родителей,
студентов педвузов



7-16

119

7-16

9

13 1 4 6 5 (a)

ABONEMENT

P14

74.2:6
Ш16



И.В.ШАДРИНА

ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ

Пособие для учителей,
родителей, студентов педвузов

СПИСАНО

Москва

«Школьная Пресса»

2003

13 1 4 6 5 (62)

Государственное учреждение культуры г. Москвы
ЦЕНТРАЛИЗОВАННАЯ
БИБЛИОТЕЧНАЯ СИСТЕМА № 1
Южного административного округа

БИБЛИОТЕКА
№ 119

ББК 22.1
Ш16

«Начальная школа: воспитание и обучение.
Приложение к журналу «Дошкольник. Младший школьник».
Выпуск 32

II полугодие 2002 г.

СМИ зарегистрировано МПТР РФ,
свид. о рег. ПИ № 11713 от 30.01.02 г.

Шадрина И.В.

Ш16 Обучение математике в начальных классах. — М.: Школьная Пресса, 2003. — 144 с. («Начальная школа: воспитание и обучение. Приложение к журналу «Дошкольник. Младший школьник». Вып. 32)

ISBN 5-9219-0171-7

В пособии курс математики начальной школы рассматривается как органическая часть общего математического образования. Поэтому прежде чем обсуждать вопрос, как обучать математике младших школьников, необходимо выяснить, зачем надо учить математике в школе и в частности в начальной школе.

Пособие предназначено для учителей математики начальной школы, а также родителей и студентов педвузов.

ББК 22.1

Охраняется Законом РФ об авторском праве. Запрещается воспроизведение всей книги или ее части без письменного разрешения издателя. Любая попытка нарушения закона будет преследоваться в судебном порядке

ISBN 5-9219-0171-7

© Шадрина И.В., 2003

© Издательство «Школьная Пресса», 2003

Учебное издание

Ирина Вениаминовна Шадрина

**ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ
В НАЧАЛЬНЫХ КЛАССАХ:**

**Пособие для учителей,
родителей, студентов
педвузов**

Редактор

Е.В. Смольникова

Корректор

И.И. Саможенкова

Макет

М.Е. Соколовой

Компьютерная верстка

С.А. Шилко

ИБ № 171

ЛР № 066828 от 23.08.99

Подписано в печать 22.11.02

Формат 70×100/16.

Гарнитура NewBaskervilleC.

Печать офс. Бумага газ.

Уч. изд. л. 5,74. Усл. печ. л. 7,8.

Тираж 5000 экз. С 171. Заказ № 4810

Издательство «Школьная Пресса»

127254, Москва, ул. Руставели, д. 10, корп. 3

Тел., факс: (095) 219-52-89, 219-52-97

Отпечатано на Ордена Трудового

Красного Знамени ГУП

Чеховский полиграфический комбинат

Министерства Российской Федерации

по делам печати, телерадиовещания

и средств массовых коммуникаций

142300, г. Чехов Московской области.

Тел. (272) 71-336, факс (272) 62-536

Литература

- Адамар Ж. Исследование психологии изобретения в области математики. — М., 1970.
- Верные Ж. Ребенок, математика и реальность. — М., 1998.
- Величковский Б.М., Капица М.С. Психологические проблемы изучения интеллекта // Интеллектуальные процессы и их моделирование. — М., 1987.
- Гнеденко Б.В. О математике. — М., 2000.
- Гнеденко Б.В., Черкасов Р.С. О преподавании математики в предстоящем тысячелетии // Математика в школе. — 1966. — № 1.
- Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. — М., 1972.
- Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. — М., 1988.
- Папи Ф., Папи Ж. Дети и графы. — М., 1974.
- Папи Ж. Геометрия в современном преподавании // Математика в школе. — 1967. — № 1.
- Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. — М., 1960.
- Пиаже Ж. Как дети образуют математические понятия // Вопросы психологии. — 1966. — № 4.
- Пойа Д. Как решать задачу. — М., 1961.
- Стойлова Л.П. Математика. — М., 2000.
- Чуприкова Н.И. Умственное развитие и обучение. — М., 1995.

Оглавление

Введение. Общая характеристика познавательной деятельности младших школьников в процессе обучения математике	3
Глава I. ОБУЧЕНИЕ АРИФМЕТИКЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ	
§ 1. Дочисловой период в обучении математике	8
§ 2. Раскрытие смысла понятия «количественное число»	19
§ 3. Раскрытие смысла понятия «порядковое число»	37
§ 4. Число как мера величины	47
§ 5. Принципы построения позиционной системы счисления	61
§ 6. Обучение нумерации натуральных чисел	76
§ 7. Свойства арифметических действий и их изучение в начальной школе	92
§ 8. Текстовые арифметические задачи	106
Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ	
§ 1. Тождественные преобразования арифметических выражений	127
§ 2. Способы решения уравнений	131
§ 3. Принципы построения системы обучения младших школьников элементам геометрии	139
Литература	144

Введение

Общая характеристика познавательной деятельности младших школьников в процессе обучения математике

В данном пособии курс математики начальной школы рассматривается как органическая часть общего математического образования. Поэтому прежде чем обсуждать вопрос, как обучать математике младших школьников, необходимо выяснить, зачем надо учить математике в школе и в частности в начальной школе. Поиск ответа на вопрос «зачем?» может, по крайней мере, идти в двух направлениях: каково значение математического образования для общества в целом и каково его значение для каждого человека в отдельности.

Социальная значимость математического образования достаточно очевидна. Математика во все времена имела бесспорное культурное и практическое значение, ее роль в научном, техническом и экономическом развитии не может быть подвергнута сомнению. Значит, для полноценного функционирования современного общества математическое знание как непреходящая ценность должно передаваться следующим поколениям.

С другой стороны, «математическое образование есть благо, на которое имеет право каждое человеческое существо»¹. В чем же состоит это благо?

Во-первых, изучение математики формирует культуру мышления, которая нужна человеку независимо ни от его будущей профессии, ни от иных значимых социальных характеристик. Изучение математики является незаменимым средством, способствующим развитию когнитивных свойств личности, таких качеств мышления, как точность и обстоятельность аргументации, умения выделять те и только те стороны наблюдаемых явлений, которые принципиальны для существа дела, что дает возможность исследовать и осмысливать задачи, возникающие в различных областях человеческой деятельности.

Во-вторых, изучение математики формирует такие качества личности, как стремление к истине, интеллектуальную честность, настойчивость в достижении цели, способность сосредотачиваться, умение преодолевать трудности. То есть усвоение математики играет очень важную роль

¹См.: XIX Международная конференция по народному образованию. — Женева, 1956.

не только в развитии интеллекта, но и в формировании характера. В то же время, интеллектуальные достижения, неизбежные в процессе изучения математики, приносят удовлетворение и гордость, способствуют уверенности в себе, осознанию собственной самооценности. Все это возможно, только если освоение математики проходит успешно. Таким образом, задача методики найти такие пути обучения, при которых все учащиеся успешно и с увлечением постигают математику, познают свои способности, которые, как правило, достаточно велики.

Искомые пути могут быть выявлены на основе анализа процесса обучения математике с двух разных, но взаимосвязанных точек зрения: с помощью углубленного анализа содержания обучения и, вместе с тем, с помощью анализа особенностей познавательной деятельности младших школьников в процессе усвоения математического знания.

Анализ содержания математического образования в начальных классах будет дан в следующих главах, рассматривающих частные вопросы методики. Во введении же мы рассмотрим условия организации познавательной деятельности младших школьников, при которых усвоение математики может быть наиболее успешным.

Познавательная деятельность детей в области математики может быть организована двумя способами: либо как деятельность по усвоению «готового» знания, либо как деятельность по «открытию» нового знания самим ребенком. В первом случае процесс обучения обеспечивает, главным образом, овладение умением производить вычисления и решать текстовые задачи определенных видов, а также минимумом обязательных знаний для того, чтобы продолжить обучение в основной школе. Иными словами, обеспечивает достижение прагматической и специальной целей обучения.

Во втором случае в процессе изучения математики ребенок овладевает некоторыми навыками самостоятельного мышления, целым спектром познавательных действий и операций: перцептивных, мнемических, интеллектуальных. В этом случае обучение математике направлено на ознакомление учащихся с математическим методом познания, на развитие их когнитивной сферы. При этом математические знания возникают как необходимый итог собственного поиска, что ведет к пониманию изучаемого и успешности применения полученных знаний в новых нестандартных ситуациях.

Организуя познавательную деятельность младших школьников на эвристической основе, следует помнить, что математическое знание имеет утилитарное происхождение, т.е. возникает в процессе решения вполне конкретных практических задач. Процесс решения таких задач требует наблюдения и анализа ситуаций, в которых возникла задача, что, в свою очередь, ведет к выделению неизменных инвариантных характеристик целого ряда аналогичных ситуаций и формулированию правил действий с выделенными инвариантами. В дальнейшем выделенные инварианты и правила получают статус основных понятий, а их использование ведет к осознанию границ применимости, к определению (указанию) пределов. Так, несмотря на то, что $2 + 2$ всегда 4, наливая в сосуд

2 л
кон
мо
лен
про
сле
ми
ход
чае
стр
сво
вну
П
ляе
шко
тич
что
зна
бы
чени
чем
дет
пон
разв
зуют
зова
У
Их р
в обл
тику
тей
тема
щем
слова
воли
ли, н
чени
ет да
мате
ниче
ческо
ствен
польз
можн
венно

2 л воды и 2 л спирта, не получим 4 – х литров смеси. Следовательно, конструируется модель целого класса реальных явлений и появляется возможность анализировать саму модель, независимо от тех ситуаций и явлений, в процессе анализа которых она возникла. При этом частично проверяется адекватность построенной модели, а отчасти выводятся следствия, которые не могут быть непосредственно усмотрены. Здесь доминирующим мотивом поиска выступает не столько практическая необходимость, сколько научная любознательность, а изучаемая модель получает статус теории. Таким образом, «математика представляет собой стройную и глубокую совокупность знаний о математических моделях со своими проблемами, с собственными путями развития, обусловленными внутренними и внешними причинами и задачами»¹.

Приведенная краткая схема генезиса математического знания позволяет заметить, что организация познавательной деятельности младших школьников должна ориентироваться на обучение построению математических моделей реальных, доступных наблюдению детей явлений так, чтобы обеспечить понимание сложных взаимосвязей математического знания, в первую очередь его содержательных аспектов. Для того, чтобы наблюдаемые закономерности и отношения могли стать объектом изучения, нужно описать их знаково-символическими средствами. При чем чем больше способов описания одного и того же изучаемого знания будет рассмотрено в процессе обучения, тем глубже и полнее достижимо понимание. В процессе обучения, так же как и в процессе становления и развития математики, в качестве знаково-символических средств используются предметные, вербальные, графические и специальные формализованные способы описания.

Употребление специальных символов — важнейшая черта математики. Их роль в математике так велика, что один из крупнейших специалистов в области математической логики В.А.Успенский характеризует математику как язык для описания фактов и методов самых различных областей науки и практической деятельности. В отличие от естественного, математический язык доносит идеи и факты в однозначном, не допускающем разночтения виде. Он краток и вполне определен, так как лишние слова отвлекают внимание от основного. При этом математическая символика не только не оставляет места для неточностей выражения мысли, но и позволяет автоматизировать действия, необходимые для получения выводов. С другой стороны, математическая символика позволяет дать информацию в сжатой и легко обозримой форме. Но собственно математический язык, так же как и естественный, обладает лишь ограниченными возможностями. Чтобы понять ход мысли только математического языка, формул зачастую недостаточно. В полной мере сила естественного и математического языка проявляется при их совместном использовании. Естественный язык с его неисчерпаемым богатством возможностей позволяет подметить далеко идущие аналогии между существенно разными явлениями и выявлять в них общие закономерности.

¹Кудрявцев Л.Д. Мысли о современной математике и ее изучении. — М., 1997.

Одним из первых языков, отделившимся от естественного, была позиционная система записи чисел. Ее фундаментальное преимущество в том, что арифметические операции над позиционными записями могут выполняться алгоритмически. Именно этот язык является одним из главных предметов изучения в начальной школе. Но овладение математическим языком как необходимым условием овладения математикой возможно лишь тогда, когда математические объекты тем или иным образом представлены в мышлении. Даже такое утверждение как $2 + 3 = 5$ только в том случае может быть осмысленно высказано, если его семантика имеет независимое от данной записи представление в мышлении.

Отсюда следует, что обучение математике младших школьников требует также обращения к представлениям о сущности познавательной деятельности в психологии. Современная когнитивная психология рассматривает познание как «конструктивную активность, направленную на создание внутренних описаний (репрезентаций) окружения и их преобразование в соответствии с требованиями задачи»¹. Это значит, что познание всегда целенаправленно: имеет конструктивный характер, так как объекты познания «конструируются» в сознании, и, кроме того, сконструированные представления подвергаются мысленным преобразованиям, которые определяются выбором стратегии поиска решения.

Экспериментальные данные, накопленные психологами, свидетельствуют о высокой специализации познавательных процессов в различных семантических областях. Познание математики имеет ярко выраженную специфику, связанную с тем, что математические объекты, являясь, с одной стороны, отражением объективной реальности, а с другой, — лишь мыслимой непредметной сущностью, которая объективируется в некоторой знаково-символической системе. При этом существенным элементом, способствующим гибкости познавательных стратегий, служит подвижное соотношение аналитико-вербальных и наглядно-образных способов описания, предположительно связанное с балансом активности левого и правого полушарий мозга.

Итак, методы обучения математике должны побуждать учеников к активным познавательным действиям. В начальной школе это прежде всего означает применение специальных дидактических средств, с которыми ребенок может действовать сам, преобразуя их не только мысленно, но и непосредственно руками. В познавательном процессе такие дидактические средства имеют двоякую функцию: а) обеспечивают многосторонность восприятия, включая моторику и, соответственно, мышечное чувство; б) служат разными способами наглядно-образного описания, создавая опору для описания вербального, а затем и описания символическими средствами математического языка. При этом процесс построения (конструктивная деятельность) математической модели становится многоступенчатым, а математика — *живым знанием*, возникающим в процессе активных познавательных действий самого ребенка.

¹Величковский Б.М., Капица М.С. Психологические проблемы изучения интеллекта // Интеллектуальные процессы и их моделирование. — М., 1987. — С. 125.

Знание механизма порождения математического объекта и, следовательно, процедур, в которых выявляются его важнейшие свойства, является обязательным условием понимания содержательных компонентов математики и предпосылкой осмысленного применения формальных средств.

Организация поиска решения познавательной задачи в процессе обучения на эвристической основе требует использования диалога, который предполагает выявление истины, ее поиск и становление, а не предъявление готового результата. При этом эффективность поиска в диалоге существенно зависит от употребляемых средств выражения, создания широких контекстов с привлечением всего имеющегося у учащихся опыта, включения нового знания в структуру их представлений, что предполагает применение метафорических средств и их постепенное вытеснение в процессе построения точного знания.

Изучение математики не может быть успешным, если дети не имеют возможности убедиться в достоверности математических утверждений. Единственным способом доказательства в математике является последовательное правильно расчлененное логическое рассуждение. Но такое умение с трудом приобретается и поэтому использование доказательных рассуждений в начальном обучении математике весьма ограничено. Достоверность частных утверждений в обучении младших школьников может и должна проверяться эмпирически. Например, правильность арифметических равенств проверяется соответствующими предметными действиями. Геометрически наглядное представление арифметических действий позволяет, например, высказать догадку о независимости результата сложения от порядка слагаемых, затем проверить ее вычислениями. Подобные действия являются, по существу, и первыми шагами к овладению искусством логических умозаключений. В то же время, «и сейчас, как во времена Евклида, математическое доказательство продолжает оставаться не более чем убедительным рассуждением, которое в состоянии убедить нас настолько, что мы становимся готовы убеждать с его помощью других»¹.

Таким образом, обучение младших школьников математике предполагает выполнение следующих условий:

- опору на конструктивную деятельность по выявлению и преобразованию математических моделей;
- описание изучаемого знания различными способами, предполагающими органичное включение нового знания в имеющиеся представления;
- применение диалога как средства организации эвристической деятельности;
- использование формальных компонентов описания математического знания только для фиксации вполне осмысленного содержания;
- обоснование достоверности изучаемого знания доступным и убедительным для детей способом.

¹Успенский В.А. Теорема Поста. — М., 1979.

Глава I.

Обучение арифметике натуральных чисел

§ 1. Дочисловой период в обучении математике

Основу обучения математике в начальных классах составляет арифметика натуральных чисел. Понятие натурального числа является многоуровневым и многоаспектным. Ясно, что чем полнее и глубже будет раскрыт его смысл в начальном обучении, тем успешнее будет проходить овладение математическим знанием не только в начальной школе, но и в дальнейшем обучении, так как натуральные числа составляют тот фундамент, на котором строится все грандиозное здание математики.

Принято считать, что два практических действия приводят к понятию числа: счет и измерение. Как правило, непосредственно со счета начинается и обучение математике. Но процесс пересчета предметов некоторой совокупности совсем не является элементарным действием. Каждому предмету рассматриваемой совокупности в процессе пересчета ставится в соответствие взаимно однозначным образом некоторое слово — *числительное*. Для того, чтобы пересчет имел смысл, числительные должны образовывать последовательность, отрезок которой надо помнить наизусть. Кроме того, сама исследуемая совокупность в процессе пересчета должна быть линейно упорядочена. Известно, что для преодоления трудностей их нужно разделить. В методике это принято называть подготовкой к овладению тем или иным знанием или формированию некоторого умения. В данном случае требуется, чтобы ребенок овладел умением упорядочить пересчитываемое множество предметов, имел представление о последовательности и взаимно однозначном соответствии. Но общим для таких представлений является понятие бинарного отношения. Оно и наиболее простое, так как непосредственно связано с опытом ребенка. Еще Д. Гильберт начинающему преподавательскую деятельность в университете Г. Вейлю дал такой совет: «Начинай с простейших примеров»¹. Но что может быть для первоклассника проще таких примеров, как «Миша старше Вани» или «Оля — сестра Пети». Порядковые отношения в разных формах проявления являются существенной частью дошкольного опыта детей. Осваивая окружающее пространство, ребенок знакомится с такими видами порядковых отношений, как «дальше — ближе», «выше — ниже» и т.д.

¹Рид К. Гильберт. — М., 1977. — С. 140.

В то же время следует отметить, что, заканчивая пересчет предметной совокупности на слове «пять», мы только узнали то, что при проведенном упорядочении последний из перечисляемых предметов оказался пятым, но не дали ответа на вопрос «сколько?». Ответ на этот вопрос связан с пониманием того, что каждое числительное или соответствующий знак является одновременно и обозначением того общего, что есть у всех совокупностей, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, т.е. перечисление всегда закончится на одном и том же месте независимо от того, как именно была упорядочена исследуемая совокупность. Это значит, что представления о количественном числе существенным образом опираются на возможность классификации предметных совокупностей по признаку их равночисленности, а значит, на представления об отношении эквивалентности.

Установление взаимно однозначного соответствия, необходимого в процессе счета, требует ознакомления с еще одним видом бинарных отношений — функциональными отношениями. Кроме того, формирование представлений о функциональных отношениях создает надежную опору для всего дальнейшего изучения математики.

Таким образом, мы выделили то содержание, которое должно быть предметом изучения на самых первых уроках математики. Но прежде чем показать, какими методами, способами, средствами может быть реализовано это содержание в обучении младших школьников, кратко напомним суть рассматриваемых понятий.

В повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с различными отношениями. Например, «Пушкин — автор Евгения Онегина», «Иван — родственник Марии». Здесь «автор» есть отношение между А.С.Пушкиным и романом «Евгений Онегин», «родственник» есть отношение между Иваном и Марией. В первом примере отношение установлено между объектами разной природы, а во втором — между однородными объектами.

Если обозначить произвольное отношение, например, буквой R , то запись xRu означает, что x и u находятся в отношении R . Множество, из которого берется первый из связанных отношением элементов, принято называть областью отправления отношения, а множество, из которого берется второй элемент отношения, — областью прибытия. Например, для отношения «быть автором» область отправления — множество людей, а область прибытия — множество произведений человеческого ума или рук. Если область отправления и область прибытия совпадают, то говорят, что отношение задано на данном множестве. Например, отношение «быть родственником» задано на множестве людей. Если P и Q соответственно, — область отправления и область прибытия отношения R , то некоторые $x \in P$ и $u \in Q$ могут находиться или не находиться в данном отношении, но вопрос «находятся ли x и u в этом отношении?» всегда должен иметь смысл.

Отношение называется функциональным, если любой элемент его области отправления связан не более чем с одним элементом области прибытия. Функциональное отношение просто называют функцией. Функцию естественно представлять как «закон соответствия», по которому неко-

торым элементам области отправления сопоставляются точно определенные элементы области прибытия. Если F — функциональное отношение и некоторые x и y связаны данным отношением, то элемент y обозначается $F(x)$ и называется образом элемента x , а x называется его прообразом. Из определения функционального отношения следует, что образ каждого элемента единственен, в то время как прообраз не обязан быть единственным. Например, отношение xFu , означающее « y есть мать x » является функциональным, так как у каждого человека только одна мать. Прообразом каждой женщины при этом соответствии является множество ее детей, которое может содержать более чем один элемент. Если функция такова, что у каждого образа единственный прообраз, то такую функцию принято называть взаимно однозначным отношением. Например, отношение xFu , означающее « y — столица x » является взаимно однозначным, так как у каждой страны одна столица и каждая столица является столицей одного государства.

Если между элементами двух множеств установлено функциональное отношение такое, что у каждого элемента области прибытия данной функции имеется в точности один прообраз и у каждого элемента области отправления обязательно имеется образ, то говорят, что между этими множествами установлено взаимно однозначное соответствие. Например, отношение xFu является взаимно однозначным соответствием между множеством государств и множеством столиц. Но взаимно однозначное отношение между множеством людей в аудитории и множеством стульев, которое каждому человеку ставит в соответствие стул, на котором он сидит, не является взаимно однозначным соответствием между множеством людей и множеством стульев, если найдутся свободные стулья или люди, которые не сидят ни на одном из стульев.

Рассмотрим пример отношения порядка « x старше y ». Его естественно рассматривать как отношение на множестве людей. Легко видеть, что если x старше y , то y не может быть старше x . Иными словами, это отношение не является симметричным. Примерами подобных отношений могут служить: « x меньше y », « x продолжительнее y » и т.д. В общем виде свойство несимметричности можно выразить так: отношение R называется несимметричным (антисимметричным), если из того, что xRu следует, что yRx неверно.

Каждое из приведенных выше отношений таково, что ни один объект не может находиться в этом отношении сам с собой. То есть, xRx неверно ни для какого x . Такое свойство принято называть антирефлексивностью. Действительно, никакой человек не старше самого себя, никакой предмет не меньше самого себя и т.п.

Но можно заметить, что если « x старше y » и « y старше z », то « x старше z ». Такое свойство называется транзитивностью и в общем виде записывается так: если xRu и yRz , то xRz .

Отношения одновременно антирефлексивные, несимметричные и транзитивные называются отношениями порядка или просто порядками. Если взять группу людей разного возраста, то их можно расположить так, что каждый следующий человек будет следовать за теми, кто старше его.

В этом
ем «бы
собами
опреде

Мож
деленн
мы, т.е.
пример
метов я
нее сам
краснее
красны
ки назы

Если
ром дан
рядок н
купност
рядочив
рядочен
пересче
само м
или час

Если
ним с ка
данному
наимен
то он на
сел на
множес
слева», т
элемент
большег
стве цел
шего, ни

Еще о
ности. Г
и того ж
дый чело
ляется р
ют один
этом отн
того, есл
то x и z т
ние тран
отношен
та наход
выделени

В этом случае говорят, что данная группа людей упорядочена отношением «быть старше». Но эту же группу можно упорядочить и другими способами, например, по отношению «быть выше ростом» или отношению, определяемому алфавитным порядком фамилий.

Может оказаться так, что по отношению порядка, заданному на определенном множестве, некоторые пары элементов множества не сравнимы, т.е. ни пара (x, y) , ни пара (y, x) не связаны данным отношением. Например, отношение «быть краснее» на множестве всех окрашенных предметов является отношением порядка, так как никакой предмет не краснее самого себя, если « x краснее y », то « y краснее x » неверно и если « x краснее y » и « y краснее z », то « x краснее z ». В то же время зеленый и красный предметы нельзя сравнить по этому отношению. Такие порядки называются частичными.

Если же порядок таков, что любые два элемента множества, на котором данный порядок задан, сравнимы по этому отношению, то такой порядок называется линейным. При пересчете предметов некоторой совокупности, если счет производится правильно, данная совокупность упорядочивается отношением «следовать за» линейно, подобно тому, как упорядочен отрезок последовательности числительных, используемый при пересчете. Если на множестве задано некоторое отношение порядка, то само множество называется упорядоченным, соответственно линейно или частично.

Если в упорядоченном множестве найдется такой элемент, что он сравним с каждым из остальных и при этом в каждой паре, принадлежащей данному отношению, этот элемент является первым, то он называется наименьшим. Если же в каждой паре такой элемент оказывается вторым, то он называется наибольшим. Например, в множестве натуральных чисел наименьшим является число 1, а наибольшего числа не существует. В множестве книг, стоящих на полке, упорядоченном отношением «стоять слева», т.е. xSy означает, что книга x стоит слева от книги y , наименьшим элементом будет самая левая книга, а наибольшим — самая правая. Наибольшего и наименьшего элементов может не быть. Например, в множестве целых чисел, упорядоченном отношением «меньше», нет ни наибольшего, ни наименьшего элементов.

Еще одним важнейшим отношением является *отношение эквивалентности*. Примером такого отношения является отношение «быть одного и того же возраста», заданное на множестве людей. Очевидно, что каждый человек находится в этом отношении сам с собой и поэтому оно является рефлексивным. Если x и y находятся в этом отношении, т.е. имеют один и тот же возраст, то очевидно, что и y , и x также находятся в этом отношении. Это значит, что оно является симметричным. Кроме того, если x и y одного и того же возраста и y и z тоже одного возраста, то x и z также имеют один и тот же возраст. Иными словами, это отношение транзитивно. Любое рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение называется отношением эквивалентности. Если два элемента находятся в отношении эквивалентности, то они не различаются по выделенному данным отношением свойству и по этому признаку являют-

ся одинаковыми. Пусть x — какой-то человек. Тогда можно рассмотреть всех тех и только тех людей, которые имеют с ним один возраст. Такое подмножество принято называть классом эквивалентности. Очевидно, что каждый человек попадает в один и только один класс людей, равно-возрастных с ним. Если возраст измерять в годах, то получим следующие классы эквивалентности: люди в возрасте до одного года, до двух лет, до трех лет и т.д. Классы эквивалентности разбивают множество людей на попарно непересекающиеся подмножества, в каждом из которых имеется хотя бы один человек, а объединение этих классов равно множеству всех людей.

Это рассуждение верно и для любого отношения эквивалентности. Действительно, если R есть отношение эквивалентности на множестве M , то, выделив некоторый элемент этого множества, найдем все элементы, находящиеся с ним в данном отношении, и только их. Получаем однозначно определенный класс эквивалентности. Так как каждый элемент попадает в один и только один класс, то все множество M разбивается на попарно не пересекающиеся подмножества. Но это значит, что в качестве нового математического объекта можно рассматривать то общее, что есть у всех элементов одного класса.

Рассмотрим следующее отношение между двумя множествами. Два множества будем считать находящимися в данном отношении, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Это отношение является отношением эквивалентности. Действительно, оно *рефлексивно*, любое множество эквивалентно по данному отношению самому себе, так как каждому его элементу можно поставить в соответствие сам этот элемент.

Если между двумя множествами установлено взаимно однозначное соответствие, т.е. каждому элементу множества A соответствует один и только один элемент множества B и для каждого элемента B найдется единственный элемент в A , для которого он служит образом, то соответствие между B и A такое, что каждому элементу B поставлен в соответствие его прообраз и оно является взаимно однозначным между множествами B и A . То есть данное отношение является *симметричным*.

Если между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие F и между множествами B и C установлено взаимно однозначное соответствие G , то между A и C взаимно однозначное соответствие можно установить следующим образом: для элемента x из A найдем его образ при соответствии $Fy = F(x)$, затем для элемента y из B найдем его образ при соответствии $Gz = G(y)$. Тогда элемент z будем считать образом x . Такой z в C найдется для каждого x из A в силу свойств соответствий F и G . Но в то же время для каждого z из C найдется единственный прообраз y в B и для каждого y из B найдется единственный прообраз x в A . Это значит, что соответствие между A и C является взаимно однозначным. Таким образом, рассматриваемое отношение между множествами есть отношение эквивалентности, так как оно рефлексивно, симметрично и *транзитивно*.

Каждый класс эквивалентности по данному отношению образует те и только те множества, между которыми можно установить взаимно одно-

значное соответствие и рассматривать то общее, что есть у каждого из них. Это общее свойство принято называть мощностью множества. Если соответствующий класс эквивалентности образован конечными множествами, то мощность каждого из них есть натуральное число. Такое число также принято называть количественным или численностью каждого из множеств данного класса эквивалентности.

Итак, *количественное число* — это свойство множества, по которому оно идентично любому другому такому множеству, что между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Отвечая на вопрос «сколько?», с помощью последовательности числительных мы устанавливаем взаимно однозначное соответствие между множеством пересчитываемых объектов и некоторым отрезком последовательности числительных, которая выступает в роли эталона и должна быть заранее известна. Ранее было отмечено, что такая операция приводит к понятию «количественное число», если есть уверенность, что пересчет закончится на одном и том же месте последовательности числительных независимо от того, в каком порядке пересчитывается совокупность в этом процессе. Кроме того, возникает вопрос, является ли данная последовательность необходимой для операции счета?

Очевидно, что в качестве эталонной последовательности можно взять любую другую, лишь бы была возможность указать место выбранной последовательности, на котором заканчивается пересчет. Но это значит, что она должна удовлетворять следующим условиям: иметь начало; быть линейно упорядоченной; быть так далеко продолжаемой, как это требуется. В то же время ее материальная реализация не имеет значения, т.е. ее элементами могут быть слова, предметы или некоторые знаки. Из истории математики известно, что в качестве такой последовательности использовались узелки, зарубки на палочках, части тела и т.п.

Опишем узловые моменты построения программы деятельности младших школьников по формированию представлений о бинарных отношениях как обязательном условии подготовки к раскрытию смысла понятия «натуральное число». Приводимые ниже задания надо рассматривать как примеры, которые показывают направления реализации методикоматематических и психолого-педагогических принципов. В каждом из заданий наглядным представлением отношения служит граф, который является гомоморфным образом рассматриваемой ситуации. При этом сами рассматриваемые объекты выступают как переменные и поэтому обозначаются одним и тем же символом (кружочком), значение которого определяется соответствующим контекстом. Каждый из наглядных образов служит не только объектом восприятия, но и объектом активных преобразовательных действий самого ребенка. Так как различные отношения изображаются одним и тем же способом, то это позволяет выделить соответствующие инварианты.

Пример 1

1.1. Петя и Юра гуляют во дворе. Схематически это изображено на рисунке 1.

— Можно ли из рисунка понять, где Петя, а где Юра?

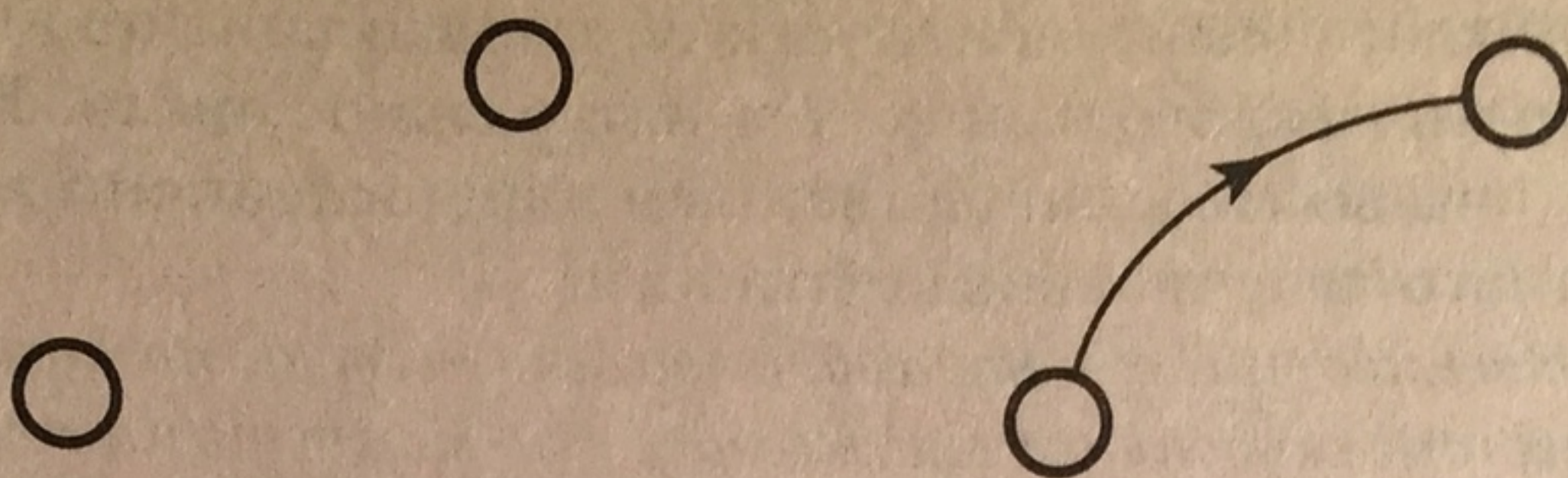


Рис. 1

Рис. 2

- Как на рисунке 2 можно показать, что Юра старше Пети?
- Представь, что у нас имеется *говорящая* стрелка, которая *говорит*: «Ты старше меня» (см. рис. 2).
- Можно ли по этому рисунку узнать, где Петя, а где Юра?
- Нарисуй такую же стрелку и красным цветом раскрась Юру, а Петю — зеленым.
- Придумай какой-нибудь рассказ, для которого подойдет рисунок 2. Например, расскажи, что красный карандаш длиннее зеленого; Катя выше Оли; ручка дороже карандаша.

1.2. Посмотри на рисунок 3. Кружки — это дети, а стрелки *говорят*: «Ты старше меня».

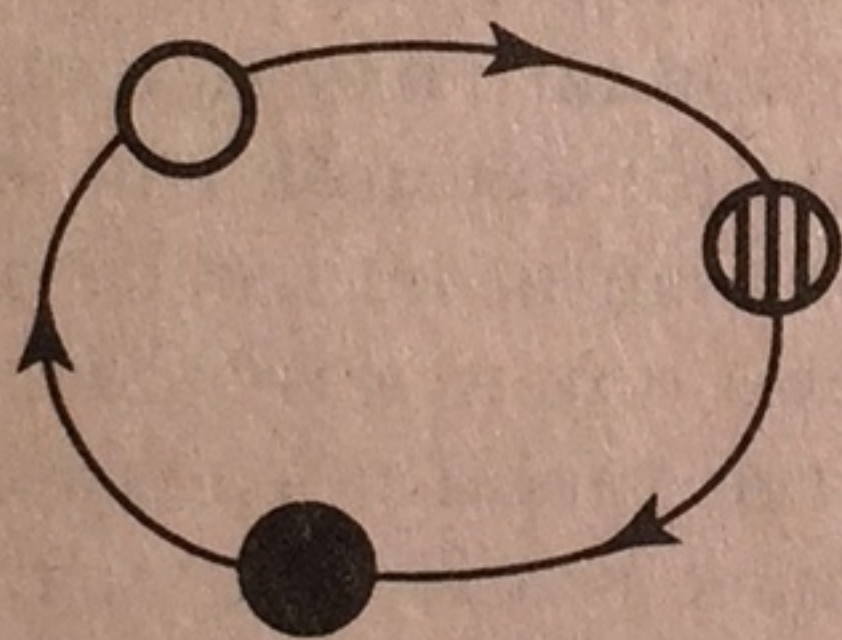


Рис. 3

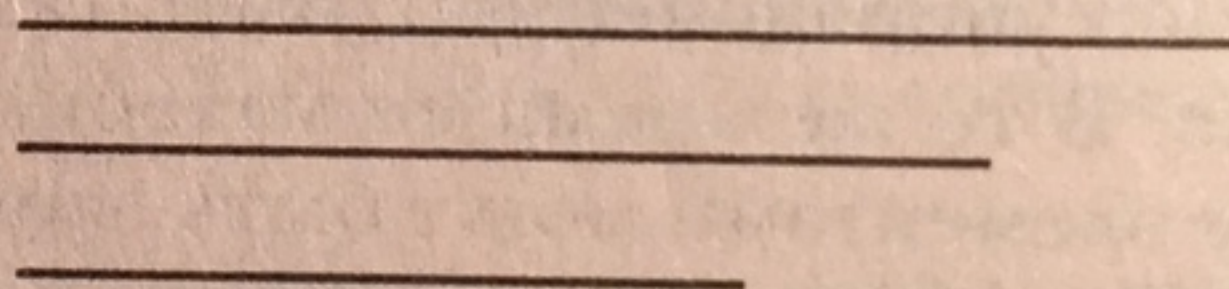


Рис. 4

— Узнай, кто из них самый старший, а кто — младший. Придумай детям имена и назови так их по порядку, чтобы каждый старший был назван вслед за каждым младшим.

— Нарисуй линиями соответствующего цвета возраст каждого из детей. Придумай другой рассказ, для которого подойдет рисунок 4.

1.3. На рисунке 5 нарисованы кружки — это дети, а стрелки указывают на того, кто старше.

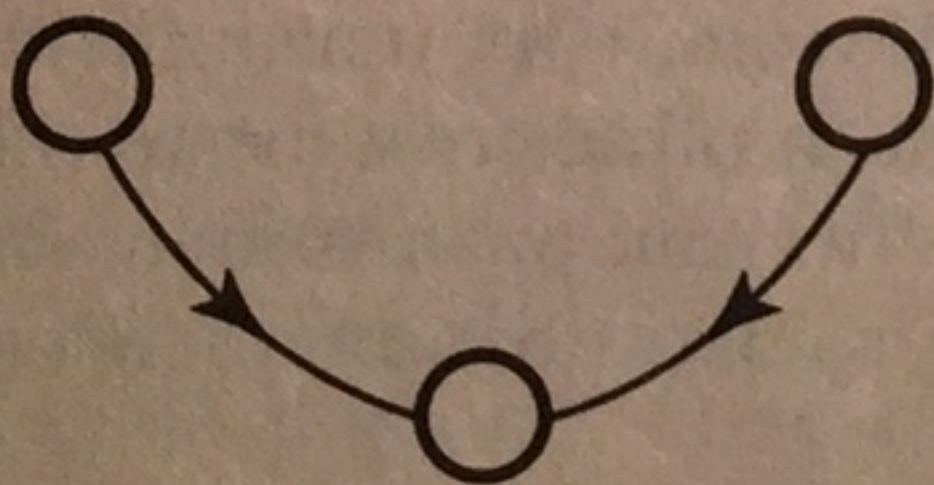


Рис. 5

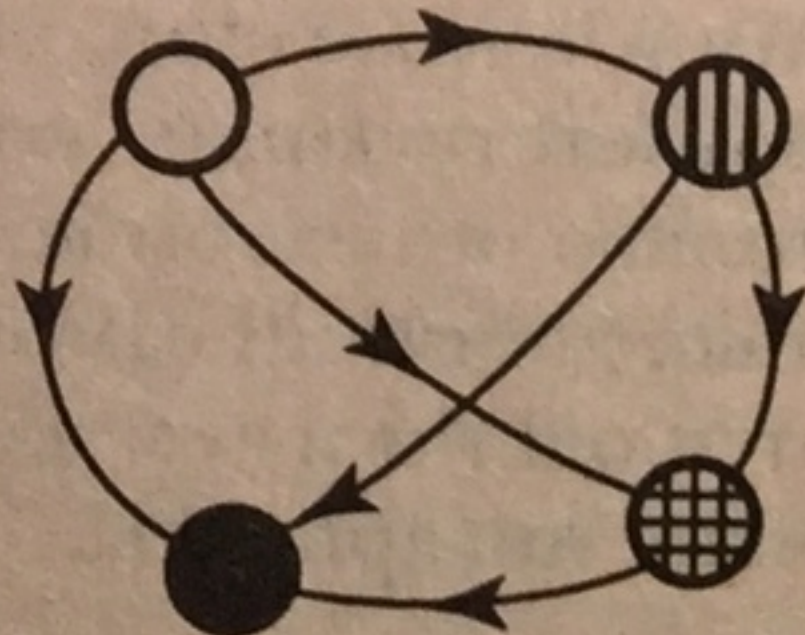


Рис. 6

- Почему двое из них ничего не сказали друг другу?
- Значит, они одного возраста.

— Раскрась красным цветом кружок, изображающий самого старшего, а зеленым — кружки, представляющие детей помладше.

— Нарисуй линиями соответствующего цвета возраст каждого из детей. Придумай другой рассказ, для которого подойдет рисунок 5.

1.4. Рассмотрим рисунок 6. Кружки — это дети (кружки разные).

— Что можно сказать о возрасте детей (см. рис. 6), если стрелки *говорят*: «Ты старше меня»?

— Эти дети разного возраста.

— Нарисуй кружки соответствующего цвета так, чтобы ряд начинался с самого младшего, а заканчивался самым старшим и каждый следующий был старше предыдущего.

1.5. Детей одного возраста (рис. 7) раскрась одним цветом, если стрелки *говорят*: «Ты старше меня».

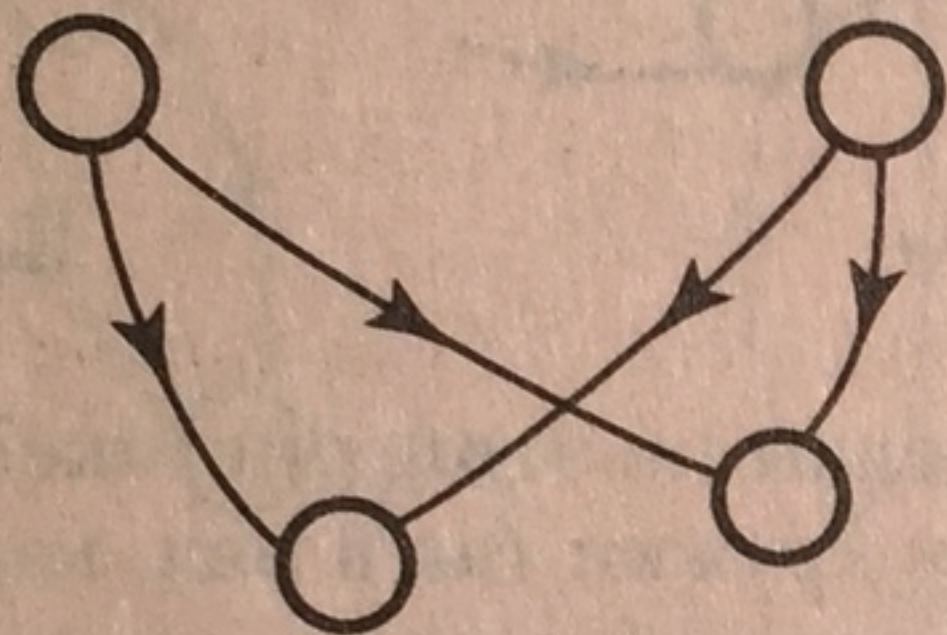


Рис. 7

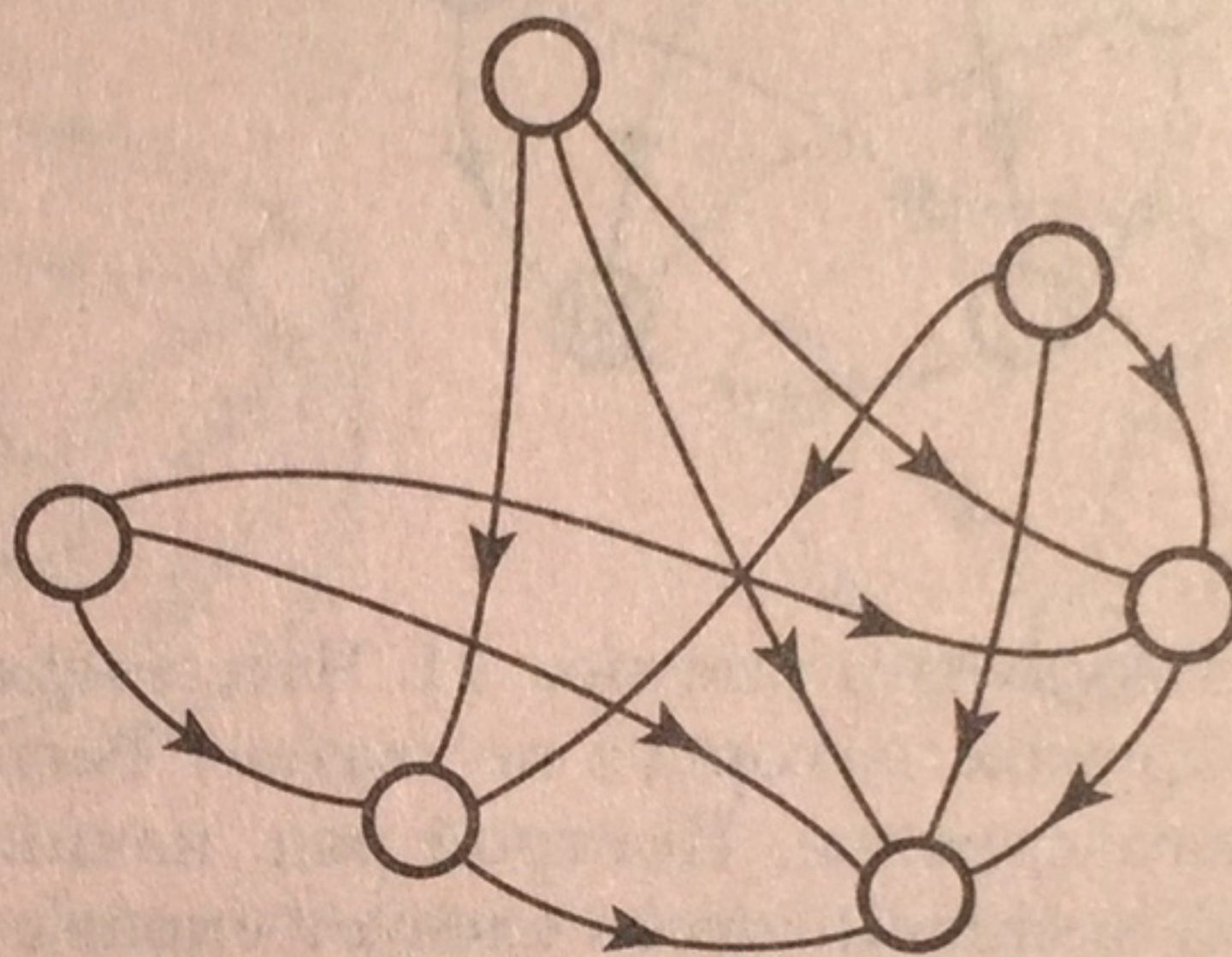


Рис. 8

1.6. Детей одного возраста (рис. 8) раскрась одним цветом, если стрелки *говорят*: «Ты старше меня».

Посади детей так в три ряда, чтобы на первом были самые младшие, на втором — постарше, а на третьем — самые старшие, если ряды представлены следующим образом:

_____	①
_____	②
_____	③

1.7. Нарисуй картинку со стрелками к следующему рассказу:

Маша с Ваней сказали Пете: «Ты старше нас», а Ваня сказал Лене: «Ты старше меня». Придумай другой рассказ, к которому подойдет твоя картинка.

Пример 2

2.1. Пусть стрелка *говорит*: «Ты идешь за мной». Нарисуй Петю красным кружком, а Юру — зеленым, если Петя идет вслед за Юрой. Поставь говорящую стрелку.

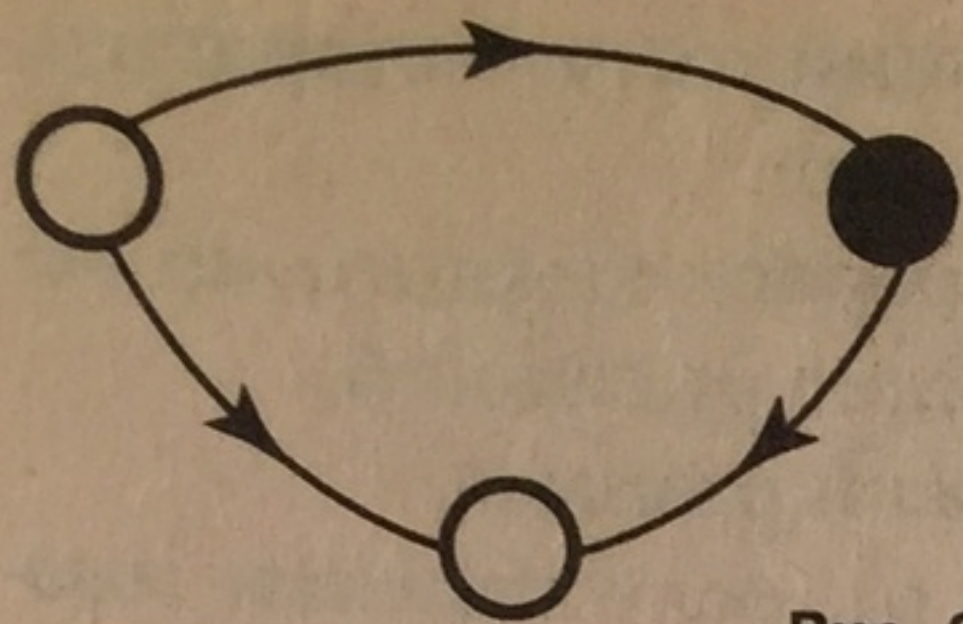


Рис. 9

2.2. Петя, Таня и Лена так идут в ряд, как показывают стрелки на рисунке 9. Раскрась Петю красным цветом, Таню — зеленым, а Лену — синим, если первым идет Петя, за ним следует Таня, а Лена идет за Таней.

2.3. Расположи детей в том порядке, как указывают стрелки. Пусть самый первый в твоём ряду идет так, что всех остальных ты видишь справа от себя (рис.10).

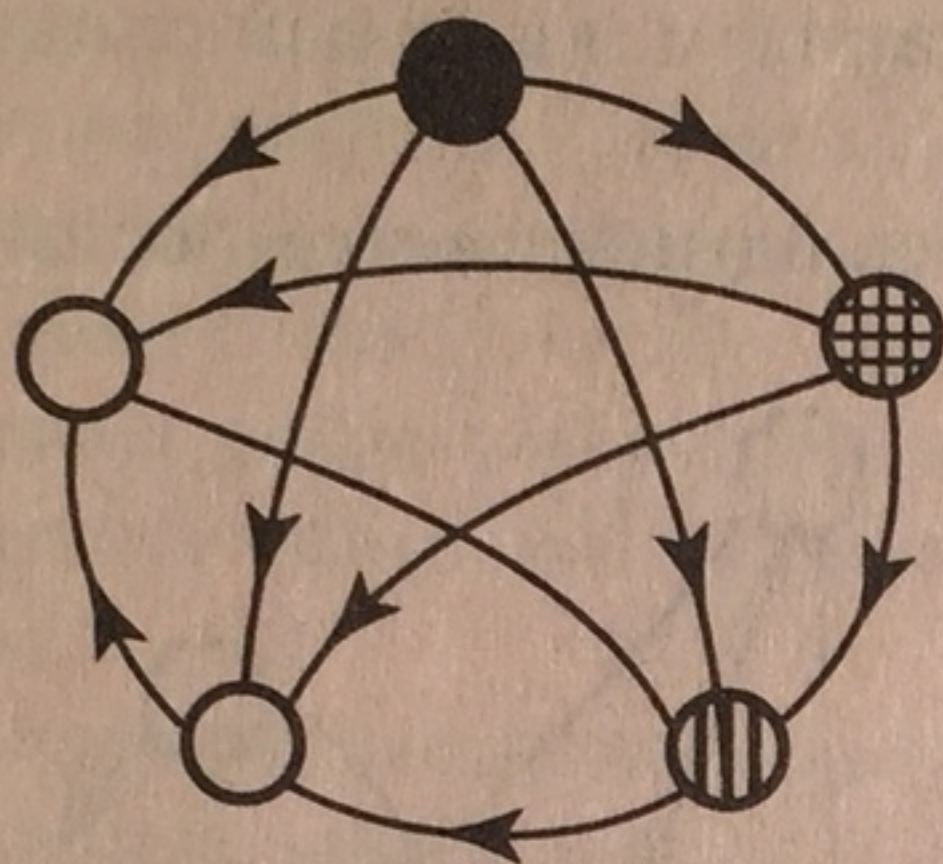


Рис. 10

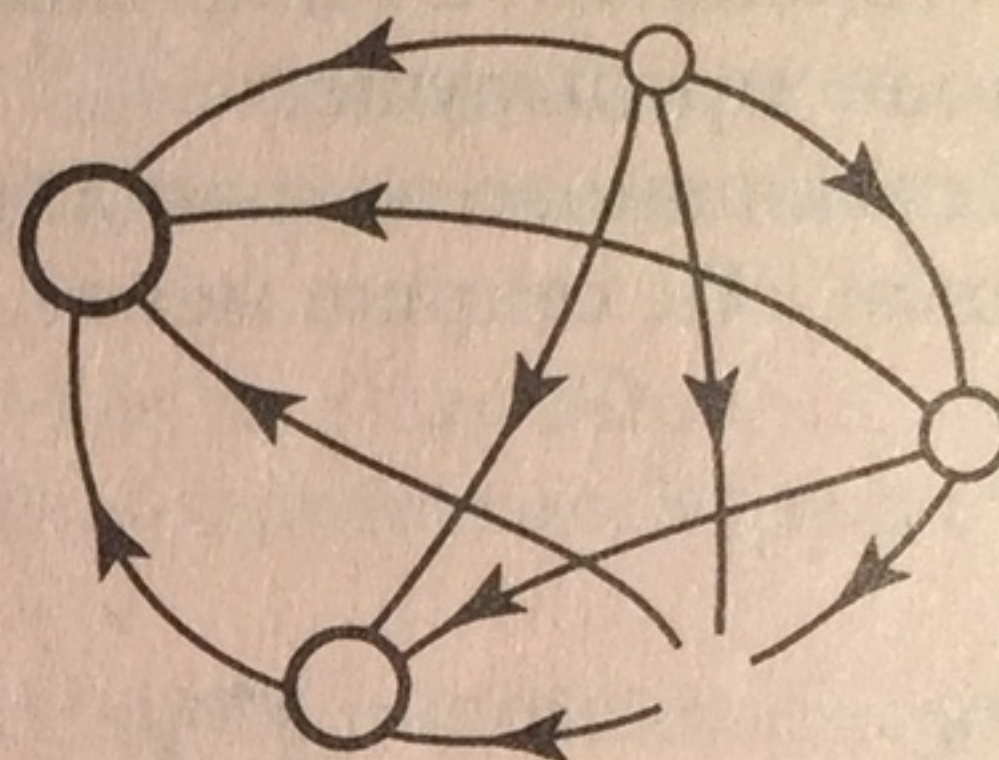


Рис. 11

2.4. Рассмотрим рисунок 11. Что *говорят* стрелки на этом рисунке? Нарисуй кружок, которого не хватает. Расположи кружки так в ряд, как показывают стрелки. Построй ряд, начиная с самого большого кружка, а каждый меньший пусть следует справа за каждым бóльшим. Можно ли продолжить ряд, соблюдая эту закономерность?

2.5. Продолжи ряды (рис.12):

- а) ○ △ ○ △ ○ △
 б) ○ ○ □ ○ ○ □
 в) / / / / / /
 г) ○ ⊥ ∨ ⊥ ∧ ∨ ⊥

Рис. 12

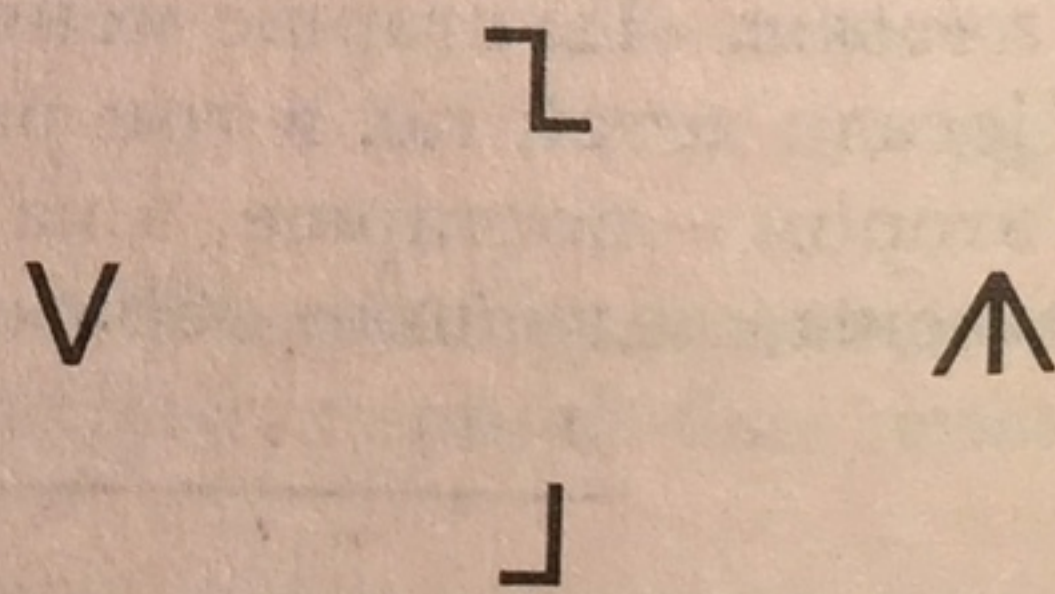


Рис. 13

Какой из этих рядов ты затрудняешься продолжить? Сравни ряды в) и г). Красным цветом подчеркни начало каждого ряда, а все последующие члены ряда — синим. Обведи в кружок следующий сразу за начальным каждый член ряда. Заключи в рамку какой-нибудь член ряда, отличный от первого. Сверху отметь дугой все члены ряда, которые ему предшествуют. Красным цветом отметь член ряда, который непосредственно следует за тем, который стоит в рамке, и член ряда, который стоит перед ним (непосредственно ему предшествует).

2.6. Из ряда, изображенного на рисунке 12, г, выбери элементы, показанные на рисунке 13.

Стрелками покажи, как они расположены в этом ряду.

Пример 3

3.1. На рисунке 14 изображены дети на перемене. Можно ли сказать, кто из них учится в одном классе? Что должен сказать один ученик другому, чтобы это можно было узнать?

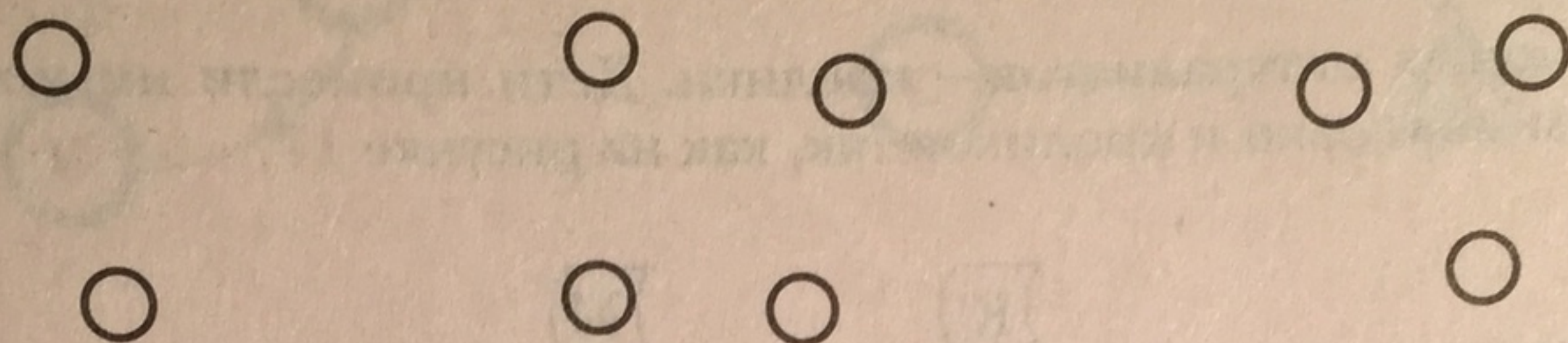


Рис. 14

Они должны сказать: «Я учусь с ним в одном классе». На рисунке 15 об этом *говорят* стрелки.

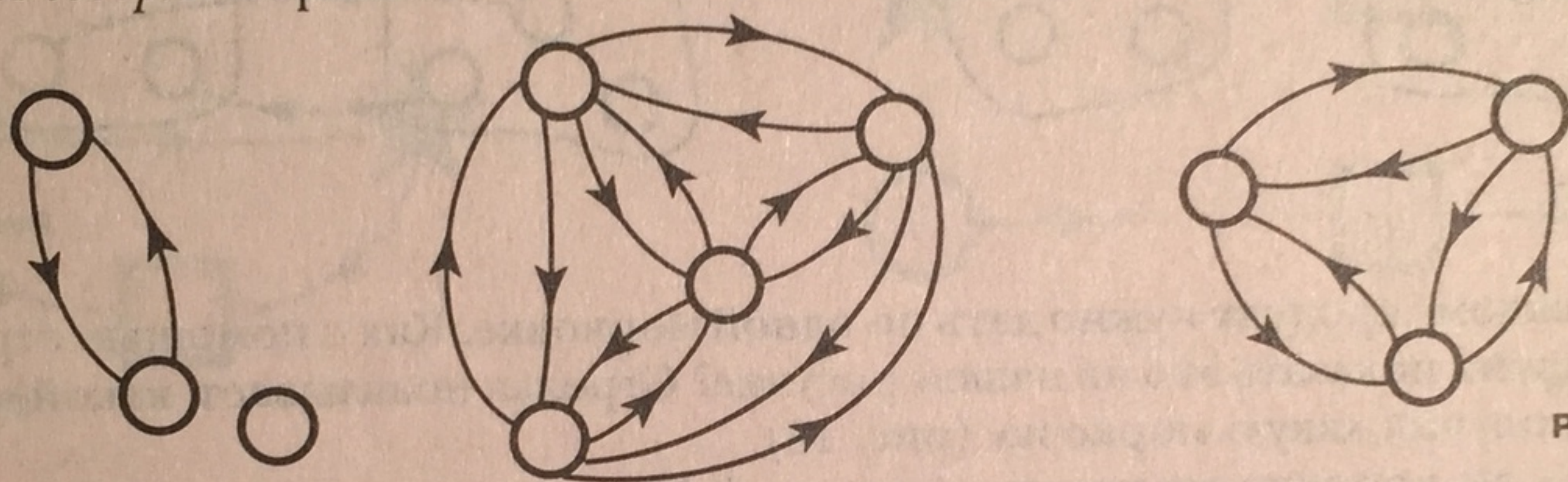


Рис. 15

Раскрась одним цветом тех ребят, которые учатся в одном классе. Собери одноклассников и заключи их в овал того цвета, которым они раскрашены.

Теперь стрелка, идущая от одного овала к другому *говорит*: «Они учатся в старшем классе». Покажи, где здесь первоклассники, второклассники, третьеклассники, четвероклассники. Нарисуй овалы соответствующего цвета так в ряд, чтобы старшеклассники (второклассники — четвероклассники) следовали справа за учениками более младшего класса.

Аналогичная работа может быть проведена с отношениями «быть одного роста», «находиться на одном и том же расстоянии от...» и т.д.

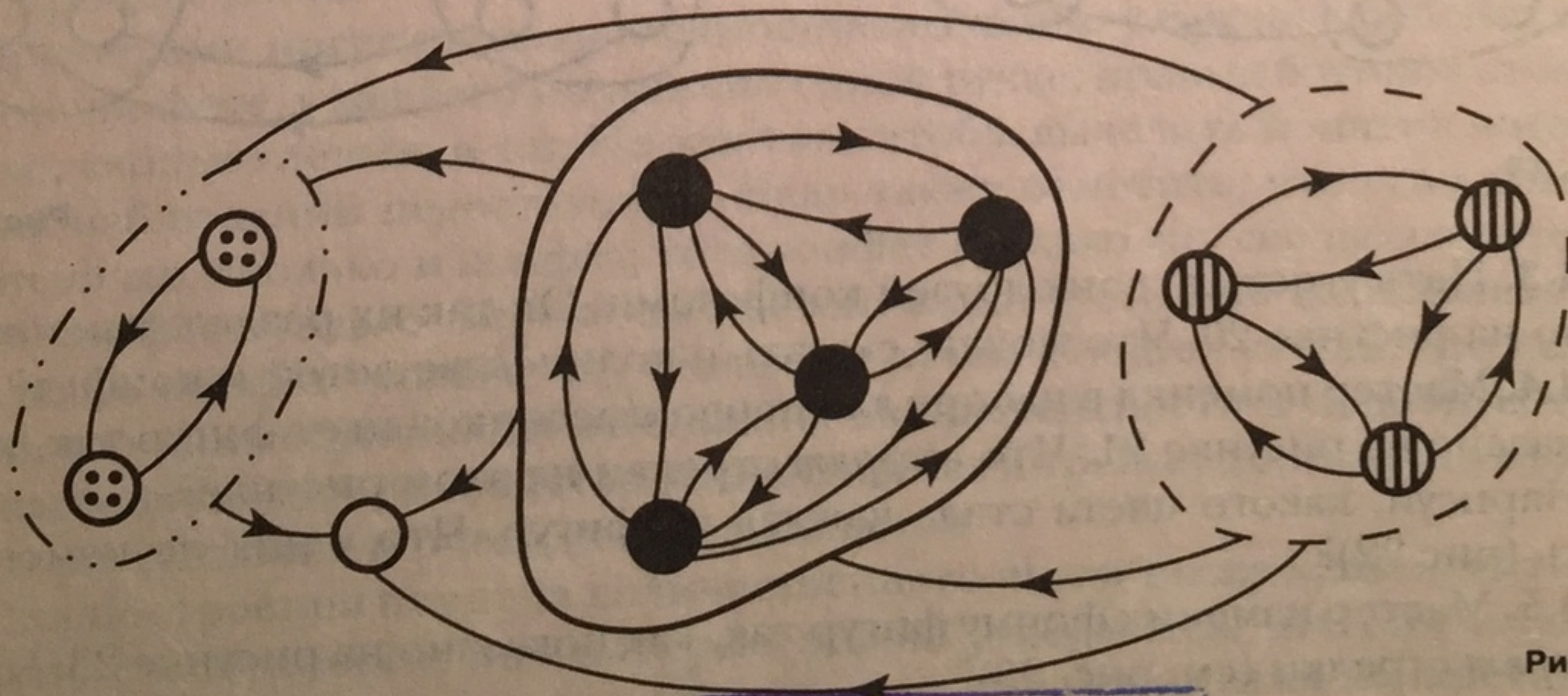


Рис. 16

БИБЛИОТЕКА
№ 119

Обратим внимание на то, что в этом случае линейно упорядочиваются классы эквивалентности, получаемые при рассмотрении данных отношений, т.е. в точности то, что происходит при упорядочении количественных натуральных чисел.

Пример 4

4.1. У юных натуралистов — кролики. Дети принесли им морковки. Нарисуем морковки и кроликов так, как на рисунке 17.

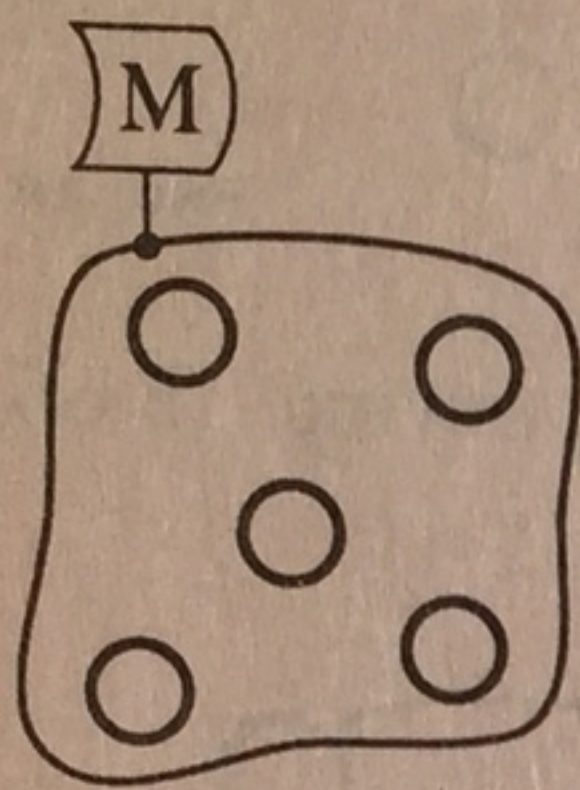


Рис. 17

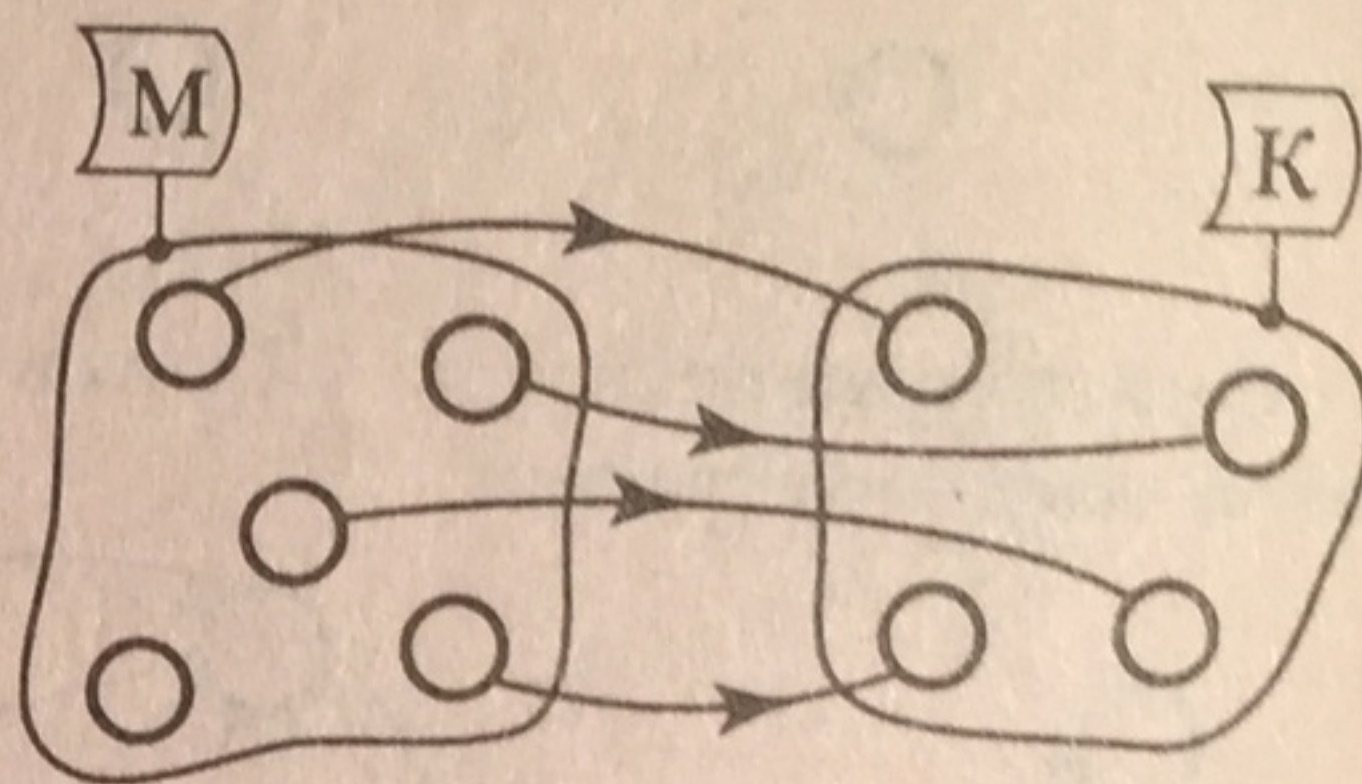
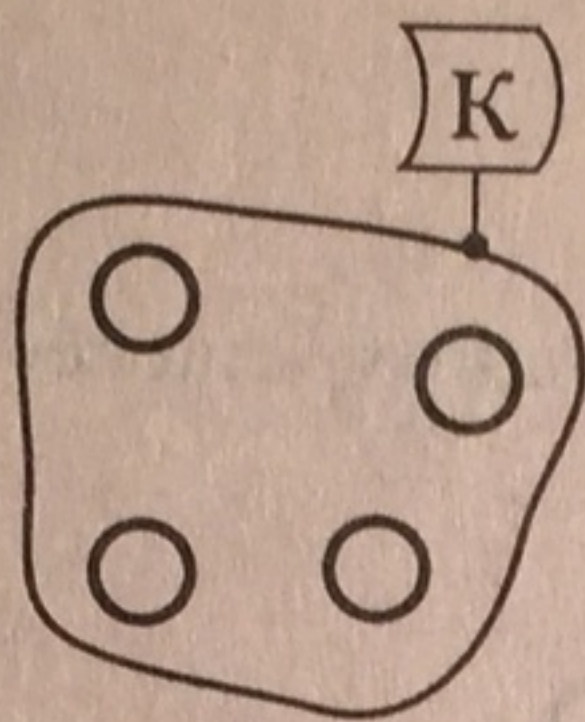


Рис. 18

Каждому кролику нужно дать по одной морковке. Как с помощью стрелки можно показать это на нашем рисунке? Стрелка показывает, какой кролик получил какую морковку (рис. 18).

Все ли кролики получили морковки? Почему от одной морковки не идет стрелка?

4.2. В этом месяце у некоторых первоклассников день рождения. Они получили поздравительные открытки. Расскажи все, что можно узнать из рисунка 19.

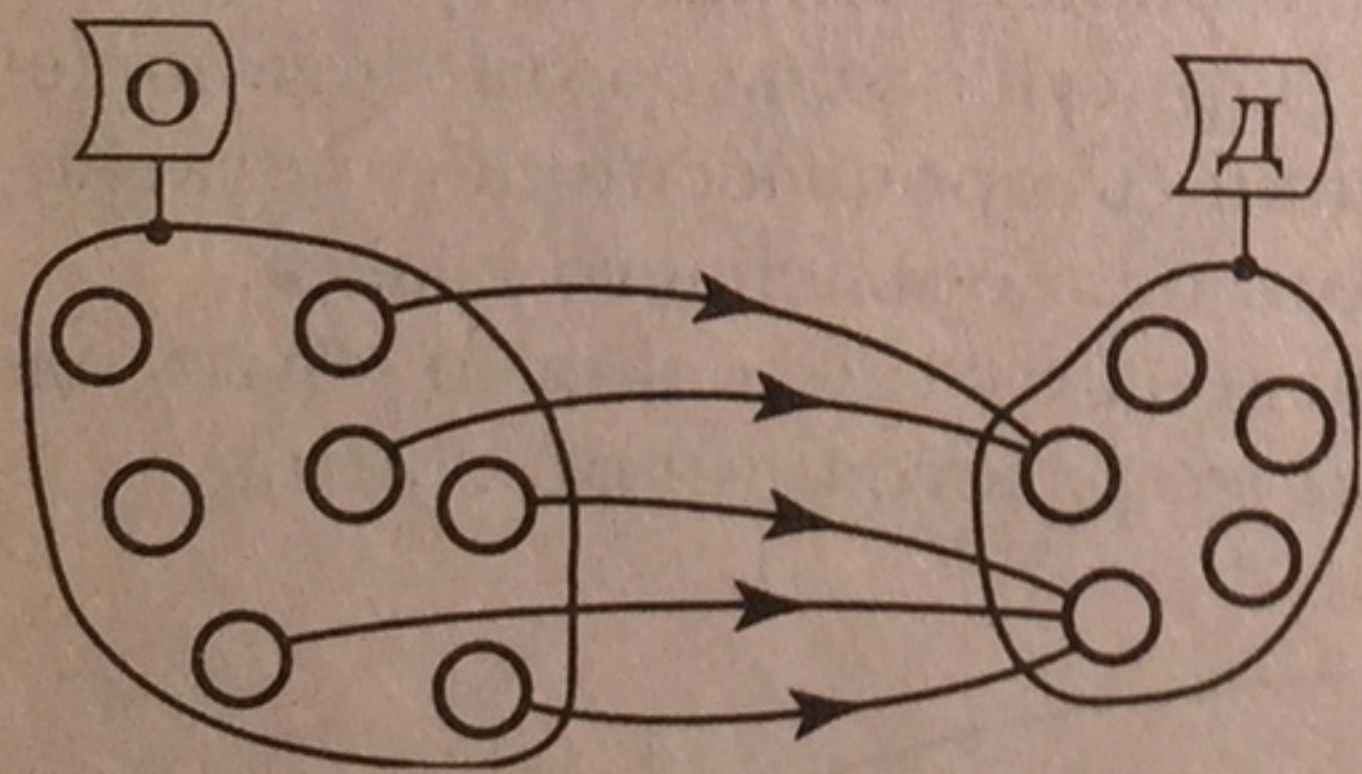


Рис. 19

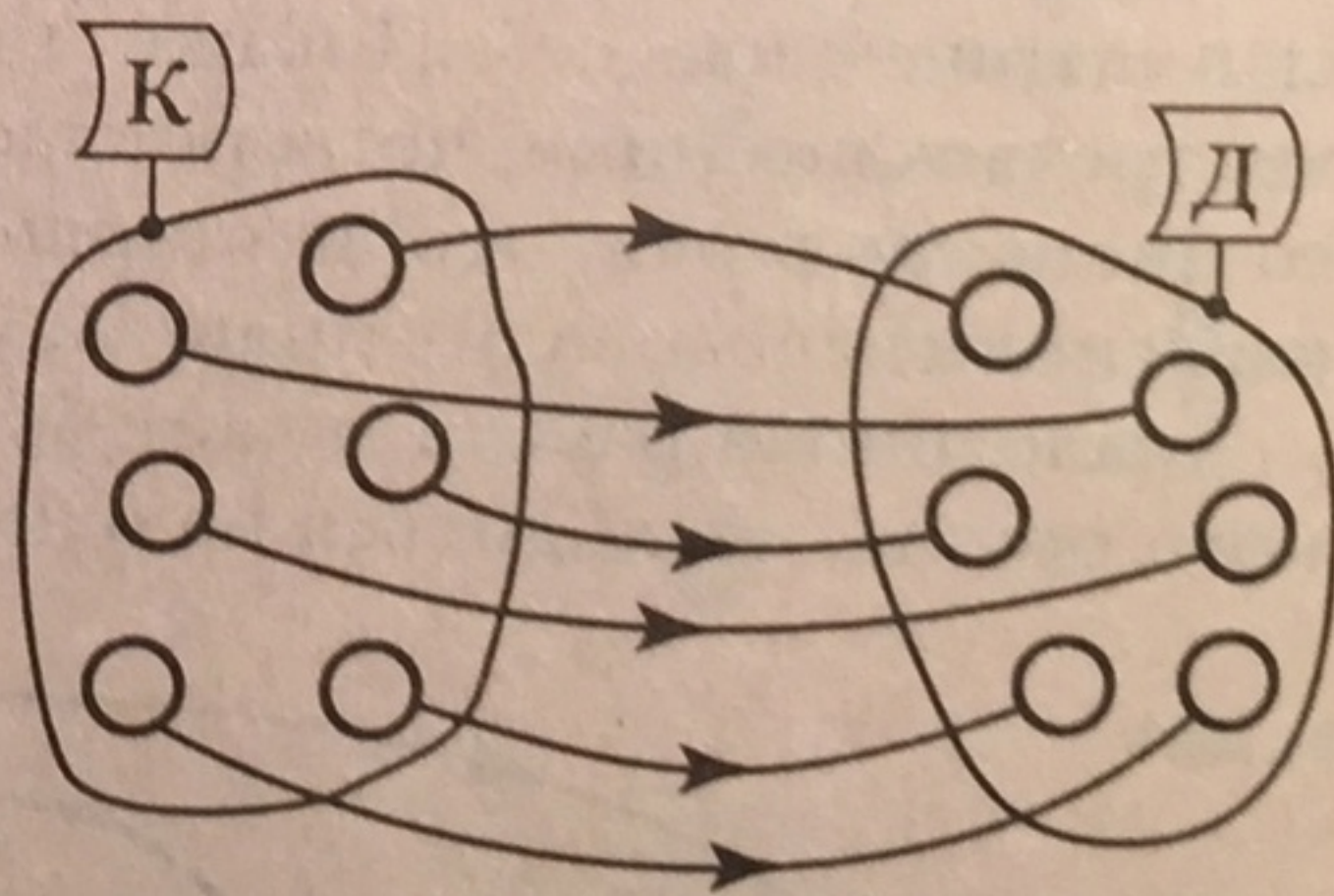


Рис. 20

4.3. Петя угостил своих друзей конфетами. Он так их раздал, как показано на рисунке 20. Что можно сказать о количестве детей и конфет?

4.4. Мастер поменял в наборе для первоклассников цвет фигур так, как показано на рисунке 21. Что *говорят* стрелки на этом рисунке?

Нарисуй, какого цвета стала каждая из фигур. Что у них не изменилось (рис. 22)?

4.5. Мастер изменил форму фигур так, как показано на рисунке 23. Что *говорят* стрелки (см. рис. 23)?

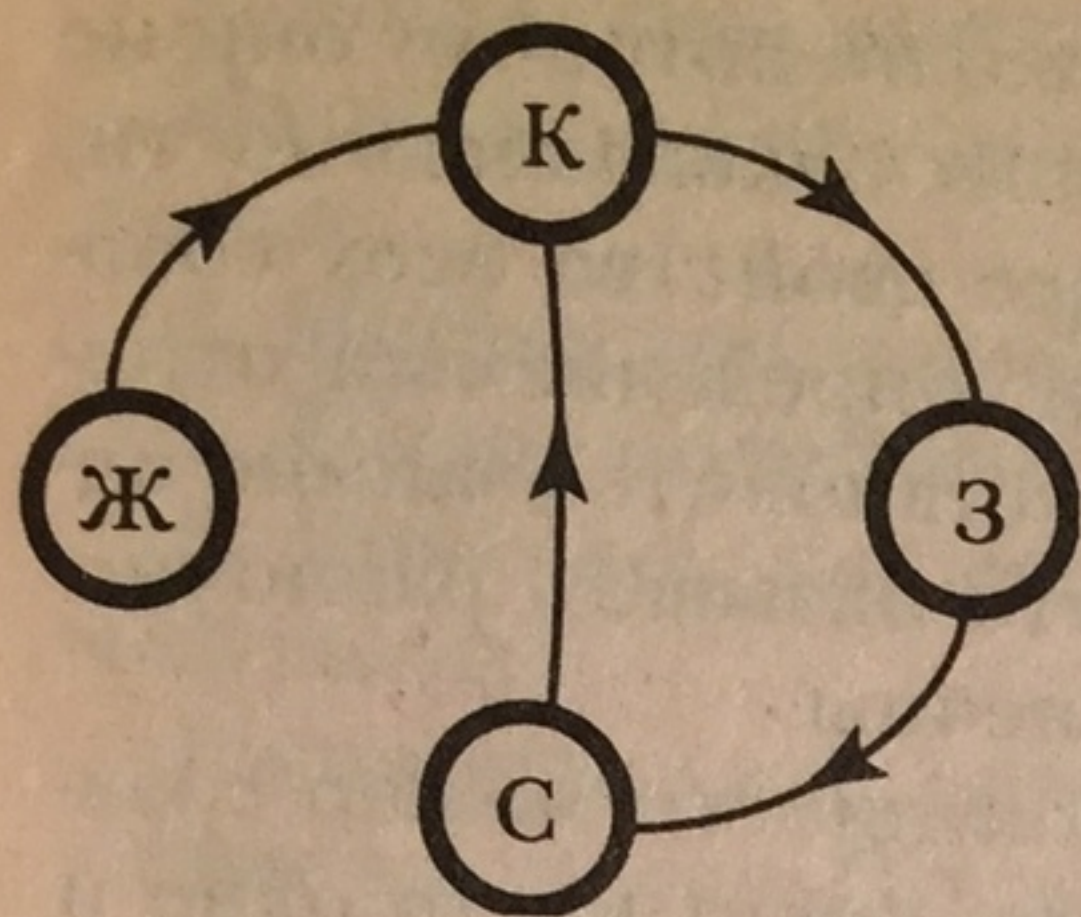


Рис. 21

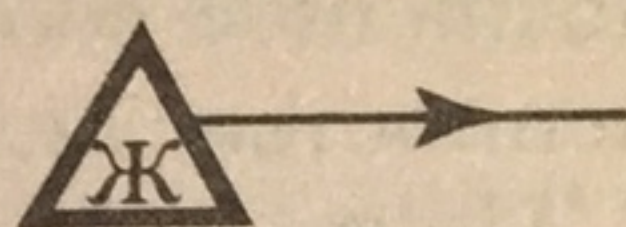
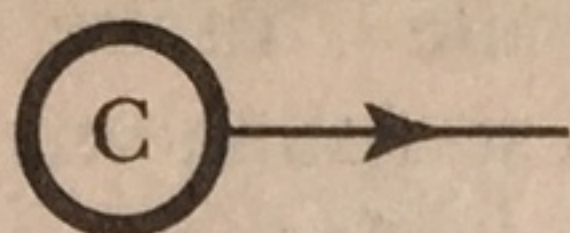
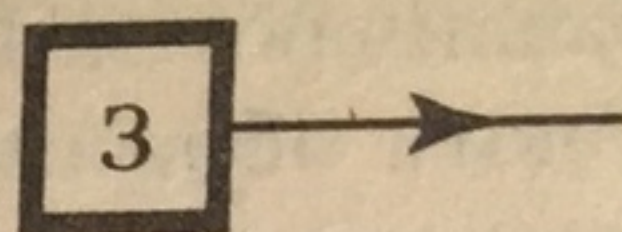
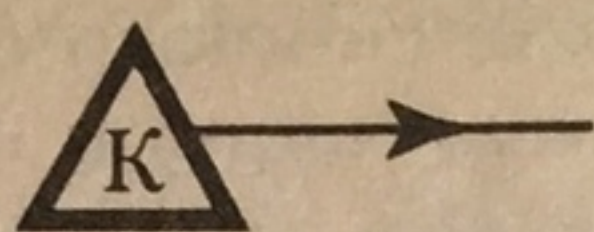


Рис. 22

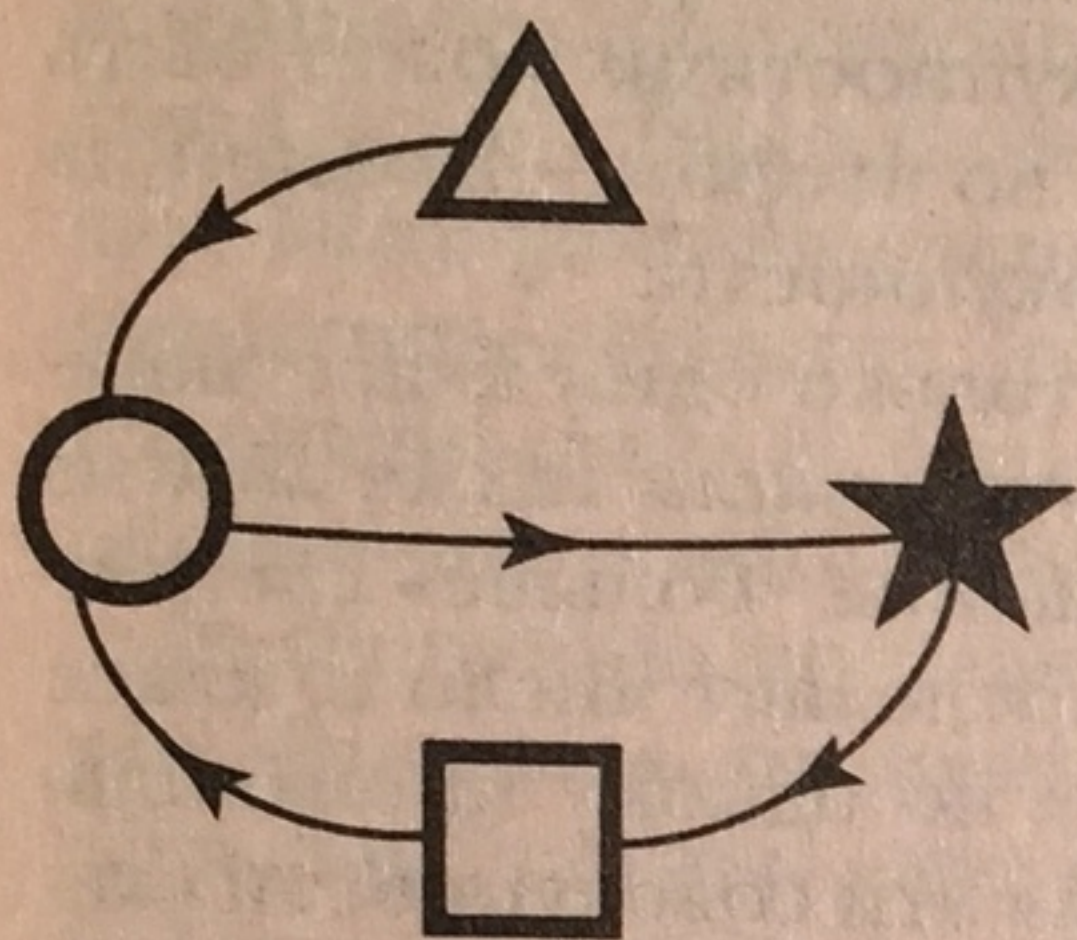


Рис. 23

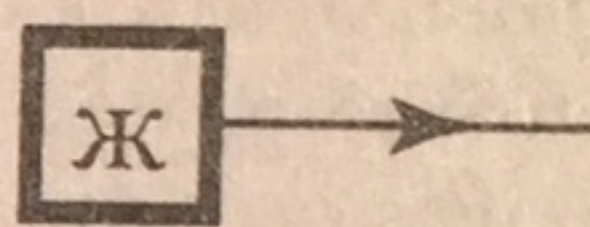
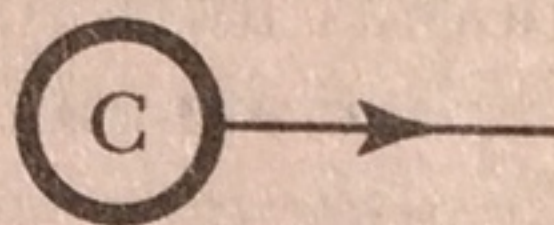
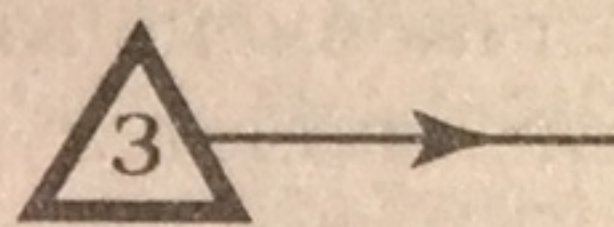
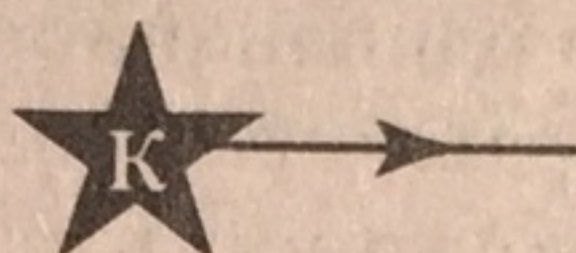


Рис. 24

Нарисуй, какой стала каждая из фигур. Что у них не изменилось (рис.24)?

§ 2. Раскрытие смысла понятия «количественное число»

Понятие количественного числа опирается на понятия взаимно однозначного соответствия и отношения эквивалентности. Процесс установления взаимно однозначного соответствия в определенных ситуациях является чрезвычайно простым и дает возможность выяснить, в какой из совокупностей столько же предметов, сколько в другой. При этом данный процесс не требует пересчета предметов и является более легким, чем процесс счета.

Примерами могут служить следующие ситуации: у каждого ребенка по одной конфете, у каждого ученика по одной ручке, правых ботинок столько же, сколько левых, и т.п. Но для того чтобы выделить понятие числа, таких наблюдений недостаточно. Надо также отметить, что если детей столько же, сколько и конфет, то и конфет столько же, сколько и детей; если конфет столько же, сколько детей, а детей столько же, сколько и ручек, то конфет столько же, сколько и ручек. Следует учесть, что если свойство симметричности отношения эквивалентности в подобных ситуациях очевидно, то свойство транзитивности требует достаточно сложного рассуждения и очевидным не является.

Для построения понятия количественного числа также нужно найти и другие совокупности, про которые можно утверждать, что они имеют столько же предметов, затем отвлечься от каждой из этих конкретных

совокупностей и рассматривать только то свойство, по которому они не различаются. Все такие совокупности образуют класс эквивалентности. Таким образом, количественное число есть общее свойство всех совокупностей, составляющих класс эквивалентности, определяемый отношением «между данными совокупностями можно установить взаимно однозначное соответствие». Такое свойство принято называть равночисленностью, если рассматриваемые множества конечны.

По этому свойству любые две предметные совокупности можно сравнивать, т.е. установить, что для любых двух из них имеет место одно и только одно из утверждений: либо они обладают этим свойством в равной степени, либо одно из них обладает им в большей мере, чем другое. В первом случае между рассматриваемыми совокупностями может быть установлено взаимно однозначное соответствие, во втором — в одной из них найдется часть, равночисленная другой совокупности.

Так как каждая совокупность входит в один и только один класс эквивалентности, то отсюда следует, что *количественные числа также можно сравнивать*, т.е. для любых двух установить отношение «больше» следующим образом. Пусть класс эквивалентности A определяет число a , класс эквивалентности B определяет число b . Возьмем по одному произвольному представителю из каждого класса. Сравнивая эти совокупности указанным выше способом, считаем, что $a = b$, если классы A и B совпадают, и a больше b , если в совокупности из класса A найдется часть, равночисленная совокупности из класса B .

Такое отношение между числами является отношением порядка, так как ни одно из чисел не может быть больше самого себя; если одно число больше другого, то второе не может быть больше первого; если одно число больше другого и это второе больше третьего, то первое больше третьего. Так как любые два числа сравнимы, то данное отношение является связным. Это значит, что количественные числа могут быть линейно упорядочены, расположены «в цепочку», например, так, что каждое большее число следует справа за каждым меньшим.

Если рассматривать совокупности, не содержащие ни одного элемента, то естественно считать, что число, определяемое такой совокупностью, меньше любого другого количественного числа. Следовательно, в нашей «цепочке» оно наименьшее и будет в ней первым.

Замечание. Под предметной совокупностью здесь всюду понимается конечное множество, т.е. такое, которое можно определить следующим индуктивным способом.

Пустым множеством называется такое, в котором нет никаких элементов, т.е. оно удовлетворяет условию $\exists x (x \in M)$.

Множество называется атомным, если оно не пусто и не имеет различных элементов, т.е. удовлетворяет условию $\exists x (x \in M) \wedge \forall y (y \in M \rightarrow y = x)$.

Тогда конечным называется множество, которое может быть получено следующим образом:

- 1) Пустое множество конечно.
- 2) Если A — конечное множество и B — атомное множество, то множество $A \cup B$ конечно.

3) Множество
Из предположения:

1. Множество
2. Вся совокупность
3. Конечная часть

Рассматривая совокупности, принадлежащие к одному классу эквивалентности, можно установить, что для любых двух из них имеет место одно и только одно из утверждений: либо они обладают этим свойством в равной степени, либо одно из них обладает им в большей мере, чем другое. В первом случае между рассматриваемыми совокупностями может быть установлено взаимно однозначное соответствие, во втором — в одной из них найдется часть, равночисленная другой совокупности.

Таким образом, количественные числа также можно сравнивать, т.е. для любых двух установить отношение «больше» следующим образом. Пусть класс эквивалентности A определяет число a , класс эквивалентности B определяет число b . Возьмем по одному произвольному представителю из каждого класса. Сравнивая эти совокупности указанным выше способом, считаем, что $a = b$, если классы A и B совпадают, и a больше b , если в совокупности из класса A найдется часть, равночисленная совокупности из класса B .

Такое отношение между числами является отношением порядка, так как ни одно из чисел не может быть больше самого себя; если одно число больше другого, то второе не может быть больше первого; если одно число больше другого и это второе больше третьего, то первое больше третьего. Так как любые два числа сравнимы, то данное отношение является связным. Это значит, что количественные числа могут быть линейно упорядочены, расположены «в цепочку», например, так, что каждое большее число следует справа за каждым меньшим.

3) Множество может быть конечным только в силу 1) и 2).

Из приведенного определения могут быть получены следующие утверждения:

1. Множество, равночисленное конечному, конечно.
2. Всякое подмножество конечного множества конечно.
3. Конечное множество не может быть равночисленно своей истинной части¹.

Рассмотрим еще одно важное свойство порядка на множестве количественных чисел. Пусть a — некоторое количественное число. Тогда имеется совокупность A , численность которой равна a . Возьмем некоторый предмет, не являющийся элементом A . Обозначим его x . Рассмотрим совокупность, получающуюся из A «добавлением» x . То есть совокупность $B = A \cup \{x\}$. Тогда B имеет своей истинной частью A и, значит, B не может быть равночисленна A . Так как B содержит истинную часть, равночисленную A (напр., само A), то количественное число, определяемое совокупностью B , больше, чем число, определяемое A . Если эти числа обозначить a и b соответственно, то имеем: $a < b$.

Естественно поставить вопрос, можно ли найти такое число c , которое больше a , но меньше b . Легко догадаться, что ответ будет отрицательным, так как изменить численность того или иного конечного множества можно только «добавляя» или «удаляя» некоторые элементы. Но каждая из этих операций приводит к предметной совокупности из другого класса эквивалентности. Таким образом, среди количественных чисел существуют такие, из которых одно из них больше другого, но не существует такого числа, которое находится между ними. Такое свойство порядка называется дискретностью. Это значит, что численности конечных множеств можно расположить в последовательность, начало которой есть численность пустого множества, а каждый непосредственно следующий за некоторым элементом последовательности элемент, есть такой, который определяется с помощью описанной выше конструкции, и он единственен. Отсюда следует, что количественные числа можно сравнивать, не устанавливая взаимно однозначного соответствия, если они расположены в последовательность указанным образом. Для этого достаточно найти место, занимаемое каждым из чисел. То число больше, которое занимает в последовательности место дальше от начала.

Значение количественных чисел в полной степени выявляется лишь тогда, когда над ними производятся *арифметические действия*. Арифметические действия возникли в результате наблюдений над реальными явлениями. Действительно, две совокупности предметов можно соединить в одну. Полученная в результате совокупность также определяет некоторое количественное число. Но в математике объектами изучения являются не реальные явления, а абстрактные логические объекты, у которых описан ряд отношений между их элементами. С этой точки зрения, а она является единственно правильной, каждое арифметическое действие есть такое функциональное отношение между тремя числами, кото-

¹Гладкий А.В. Математическая логика. — М., 1998.

рое каждой паре чисел, взятых в определенном порядке, ставит в соответствие единственное число из того же множества. Такое отношение принято называть бинарной алгебраической операцией. Иными словами, это третье число существует и единственно для каждой упорядоченной пары чисел из фиксированного числового множества. В нашем случае это означает, что для любых двух количественных чисел, взятых в определенном порядке, найдется единственное число, которое поставлено в соответствие данной паре чисел. В зависимости от закона, по которому это третье число находится, рассматриваемая операция получает соответствующее название. Исходных прямых операций на множестве количественных чисел — две: сложение и умножение. **Закон, определяющий операцию сложения**, основан на операции объединения множеств. Напомним, что объединением двух множеств называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из них. Например, объединение множества учеников, имеющих отличные оценки по математике, и множества школьников, имеющих отличные оценки по русскому языку, есть множество отличников хотя бы по одному из данных предметов. Так как имеются учащиеся, которые учатся отлично как по математике, так и по русскому языку, то эти два множества имеют общие элементы, т.е. пересекаются. Легко видеть, что численность объединения данных множеств не равна численности объединения таких двух множеств, что их численности те же, но которые не имеют общих элементов. Поэтому сложение количественных чисел определяется так: пусть a — численность A , b — численность B , тогда суммой $a + b$ называется численность объединения A и B при условии, что A и B не имеют общих элементов. Из приведенного выше примера следует, что условие отсутствия общих элементов объединяемых множеств является существенным в определении сложения количественных чисел.

Из определения сложения следует, что для нахождения суммы количественных чисел можно поступить следующим образом: из класса эквивалентных множеств, определяющего первое число, взять конкретного представителя; затем из класса, определяющего второе число, взять такого представителя, который не имеет с выбранным множеством общих элементов; найти объединение выбранных множеств. Его численность есть искомая сумма.

Умножение количественных чисел можно определить двумя разными способами. Пусть a — численность A , b — численность B . Построим множество C следующим образом. Во-первых, будем предполагать, что в классе эквивалентности, определяющем число a , имеется достаточное количество множеств, численность которых равна a , и таких, что они попарно не пересекаются. В множестве B заменим каждый его элемент одним из выбранных в классе, определяющем число a , множеств. Получаем множество C , элементами которого являются множества, равночисленные A и попарно не пересекающиеся. Согласно построению, в множестве C ровно b элементов. Возьмем новое множество C' , которое построим как объединение множеств — элементов C . Численность C' называется произведением a и b . Так как численность объединения множеств,

не им
няемы
+ ... +
умнож
следст
ния ко

Закон
ствие
гим сп

Декар
состоя
упоряд
жество
леннос
дение

Мож
изведе
число
ные оп

Выбор
(x, y_0),
всех та
таких
заведом
них раз

Коли
нение
тей мно
мых b .
 $a \cdot b$ мож
равно a
количе

В то
ция, не
вием о
умноже
смысл у
натурал
Заметим
допуска
которо
ский). Э
получен
 b . Дейст
определ

Для к
ратные

не имеющих общих элементов, является суммой численностей объединяемых множеств, то произведение $a \cdot b$ можно записать как сумму $a + a + \dots + a$, где число слагаемых равно b . Заметим, что такое определение умножения не зависит от сложения, а его связь со сложением является следствием определения. Это значит, что операции сложения и умножения количественных чисел являются самостоятельными, независимыми.

Закон, который каждой паре количественных чисел ставит в соответствие число, являющееся их произведением, может быть определен другим способом, на основе операции декартова произведения множеств.

Декартовым произведением множеств A и B называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, каждый из которых является упорядоченной парой (x, y) , где первые компоненты пробегают все множество A , а вторые — все множество B . Если a — численность A , b — численность B , то численность декартова произведения $A \times B$ есть произведение чисел $a \cdot b$.

Можно ли утверждать, что обе описанные процедуры получения произведения чисел a и b дают для всех количественных чисел одно и то же число в качестве их произведения? Иными словами, являются ли данные определения эквивалентными? Покажем, что это действительно так.

Выберем определенный элемент y_0 из B и рассмотрим все пары вида (x, y_0) , в которых x пробегает все элементы A . Очевидно, численность всех таких пар равна численности A , т.е. равна a . Обозначим множество таких пар через A_{y_0} . Для каждого из B построим такие множества. Они заведомо не имеют общих элементов, так как любые пары каждого из них различаются вторыми компонентами.

Количество множеств A_{y_0} равно численности B , т.е. равно b . Объединение всех A_{y_0} есть $A \times B$, численность которого равна сумме численностей множеств A_{y_0} и, следовательно, равна $a + a + \dots + a$, где число слагаемых b . Таким образом, по любому из данных определений, произведение $a \cdot b$ может быть представлено как сумма b слагаемых, каждое из которых равно a . Этим доказана эквивалентность обоих определений умножения количественных чисел.

В то же время, следует еще раз подчеркнуть, что умножение — операция, не зависящая от сложения, а ее связь со сложением является следствием определения. Поэтому принятое в начальной школе определение умножения через сложение не позволяет раскрыть содержательный смысл умножения. Кроме того, вполне адекватное понятию умножения натуральных чисел, оно совсем не годится уже для рациональных чисел. Заметим также, что первое из приведенных определений умножения допускает обобщение, а именно, **произведение $a \cdot b$ есть такое число, которое производится из a , так же, как b из единицы** (Н.И.Лобачевский). Это значит, что операцию, которую произвели над единицей для получения b , нужно произвести и над a для получения произведения $a \cdot b$. Действительно, в первом определении каждый элемент множества B , определяющего число a , замещаем множеством, определяющим число b .

Для количественных чисел можно определить еще две операции, обратные к сложению и умножению. Если на некотором множестве M оп-

ределена операция \circ , т.е. для любых двух элементов $a, b \in M$, взятых в определенном порядке, существует и единственен элемент c из M , что $a \circ b = c$, то может оказаться, что уравнения $m \circ x = n$, $y \circ m = n$ имеют для любых n и m единственное решение и при этом решения обоих уравнений совпадают, тогда это значит, что любой паре (n, m) поставлен в соответствие единственный элемент $x = y \in M$. Таким образом, на множестве M определяется еще одна операция, причем она определена через операцию \circ . Эту операцию принято называть обратной к операции \circ .

Так как для количественных чисел уравнения $m + x = n$ и $y + m = n$ имеют одно и то же решение для всех пар (n, m) , для которых такое решение существует, то этим определяется операция, обратная сложению. На множестве количественных чисел она является частичной. Она называется вычитанием. Из определения вычитания следует, что разность $n - m$ — это такое число, прибавляя которое к m , получим n , т.е. имеет место равенство $m + (n - m) = n$.

Так как сложение количественных чисел есть численность объединения непересекающихся множеств, то разность $n - m$ есть численность дополнения M до N , где m — численность M , а n — численность N . Если обозначить разность $n - m$ через k , то равенства $m + k = n$, $n - m = k$, $n - k = m$ выполняются одновременно. Это значит, что выполнение одного из них влечет выполнение двух других.

Если поставить вопрос о существовании операции, обратной к вычитанию, то следует рассмотреть уравнения $x - c = d$, $c - y = d$. Из вышеизложенного ясно, что $x = c + d$, $y = c - d$. Так как указанные уравнения имеют различные решения, то операции, обратной к вычитанию, не существует. А значит, утверждения, встречающиеся в некоторых учебниках для начальной школы (напр., Л.Г. Петерсон), что операции сложения и вычитания взаимно обратны, неверно.

Чтобы найти операцию, обратную умножению, следует рассмотреть уравнения $m \cdot x = n$, $y \cdot m = n$. Если одно из них имеет решение на множестве натуральных чисел, то и другое также имеет в точности то же решение. Следовательно, операция, обратная к умножению, также существует, но является частичной, так как не для всякой пары (n, m) можно найти соответствующее количественное число, т.е. такое, которое удовлетворяет каждому из данных уравнений. Эта операция называется делением. Из определения следует, что частное чисел $n : m$ — это такое число, умножая которое на m , получим n , или $m \cdot (n : m) = n$.

Если обозначить частное $n : m$ через k , то равенства $m \cdot k = n$, $n : m = k$, $n : k = m$ выполняются одновременно, т.е. выполнение одного из них влечет выполнение двух других.

Вопрос о существовании операции, обратной к делению, решается аналогично тому, как он решается для вычитания. Действительно, уравнения $x : c = d$, $c : y = d$ имеют разные решения и, значит, операции, обратной к делению, не существует.

Если произведение количественных чисел рассматривать как численность декартова произведения множеств, то частное $n : m$ есть численность множества такого K , что $N = M \times K$, где n — численность N , а

m — численность M , n — численность N . Парах вида (n, m) из M .

Если при парно не какое из умножению умноженное количество объектов равно m , то называем $y \cdot m = n$, то жеств, кол n . Это дел

В силу т стного не сматриваем ми, что сл произведе

Из смыс стного $n : m$ в этом случ чит, что ча среди кото риваемый нуль нет см ла на нуль р изведение такое прои равна нулю

Итак, для ло», необхо

- познак ностей;

- установ вивалентно

- показат чить;

- раскры цедурой пол

- раскры знакомить с

- раскры му из эквива

- раскры чения произ

- раскры знакомить с

венно из оп

m — численность M . Или, $n : m$ — это численность вторых компонент в парах вида (x, y) , количество которых равно n , а x пробегает все значения из M , численность которого равна m .

Если произведение рассматривать как численность объединения попарно непересекающихся множеств, то смысл частного зависит от того, какое из уравнений $m \cdot x = n$ или $y \cdot m = n$ будем решать. Согласно определению умножения решение уравнения $m \cdot x = n$ означает, что x есть количество объединяемых множеств, каждое из которых имеет численность, равную m , а численность их объединения равна n . Такое деление принято называть «делением по содержанию». Если же решать уравнение $y \cdot m = n$, то частное означает численность каждого из объединяемых множеств, количество которых равно m , а численность их объединения есть n . Это деление «на равные части».

В силу того, что решения обоих уравнений совпадают, значение частного не зависит от того, какой содержательный смысл деления рассматривается, так как множители в произведении можно менять местами, что следует из определения умножения как численности декартова произведения.

Из смысла деления «по содержанию» следует процедура получения частного $n : m$, состоящая в последовательном вычитании m из n . Частное в этом случае есть количество вычитаний, исчерпывающих n . Это значит, что частное $n : m$ должно находиться в ряду чисел $m, m \cdot 2, m \cdot 3, \dots$, среди которых может не оказаться числа, равного n . При $m = 0$ рассматриваемый ряд состоит из одних нулей, и поэтому говорить о делении на нуль нет смысла. В том, что произведение любого количественного числа на нуль равно нулю, легко убедиться, если рассмотреть декартово произведение некоторого множества на пустое множество. Очевидно, что такое произведение не содержит элементов и поэтому его численность равна нулю.

Итак, для того, чтобы раскрыть смысл понятия «количественное число», необходимо:

- познакомить детей с процедурой сравнения численностей совокупностей;
- установить, что отношение равночисленности есть отношение эквивалентности;
- показать, что численности совокупностей можно линейно упорядочить;
- раскрыть смысл сложения количественных чисел, познакомить с процедурой получения сумм;
- раскрыть смысл вычитания как операции, обратной сложению, познакомить с процедурой получения разностей;
- раскрыть смысл умножения количественных чисел, согласно каждому из эквивалентных его определений, познакомить с процедурой получения произведений;
- раскрыть смысл деления как операции, обратной умножению, познакомить с процедурами получения частного, следующими непосредственно из определения.

Так как понятие количественного числа не зависит от способа обозначения чисел, то численности рассматриваемых совокупностей обозначаются строчными буквами, заключенными в квадратики. А сами совокупности, т.е. множества, обозначаются прописными буквами, заключенными в криволинейный четырехугольник. Это значит, что прописная буква есть имя множества, а строчная — его численность (мощность). Подчеркнем, что вычислительные приемы пока не рассматриваются, так как они могут лишь тогда изучаться, когда дети овладеют нумерацией, т.е. способами записи чисел в той или иной позиционной системе счисления. В то же время смысл понятия количественного числа раскрывается в тесной связи и на основании построения моделей реальных явлений, хорошо им знакомых. По существу, это значит, что с самых первых шагов овладения понятием «количественное число» дети готовятся к овладению умением решать текстовые задачи, так как в каждой рассматриваемой ситуации или явлении модель позволяет выделить связи и отношения, которые не зависят от частных несущественных деталей явления, а, отвлекаясь от них, рассматривать то общее существенное, что характеризует каждое из них, необходимое для достижения поставленной цели. При этом достигается и одна из главных целей математического образования: ознакомление детей с математическими методами познания реальности.

Пример 1

1.1. Маша раздала каждому из своих друзей по одной конфете. После этого у нее еще остались конфеты.

На рисунке 25 изображены Машины друзья. Нарисуй конфеты, которые были у Маши. Подумай, больше конфет или Машиных друзей? Чего меньше?

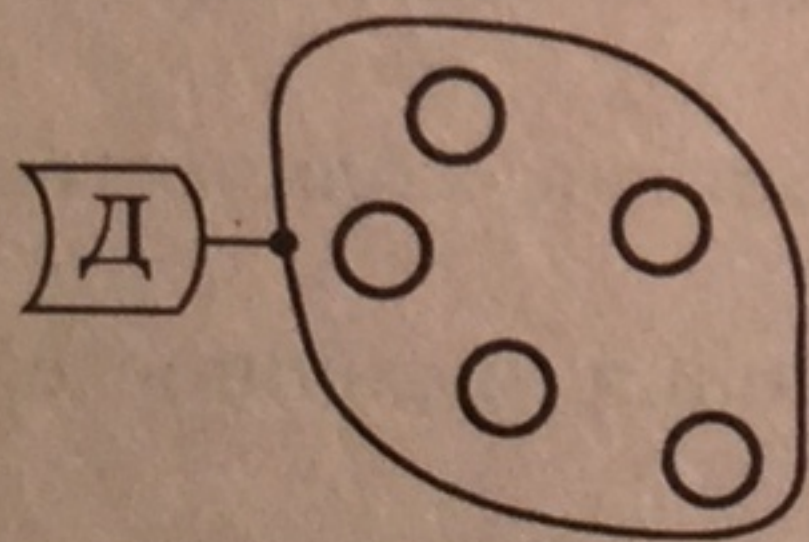


Рис. 25

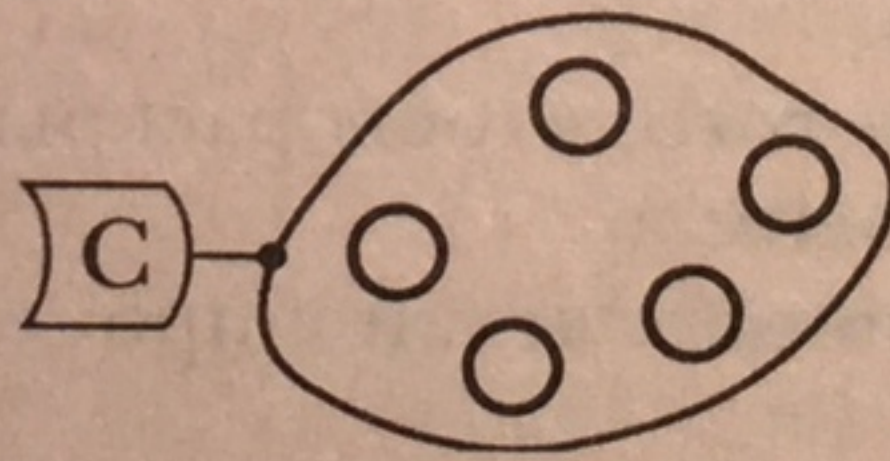


Рис. 26

1.2. Вите в каждую коробку надо положить по одному солдатику. На рисунке 26 изображены эти солдатики. Нарисуй столько коробок, сколько их потребуется Вите. Чего больше: солдатиков или коробок? Чего меньше?

1.3. Сегодня у Маши уроки математики, русского языка и природоведения. На каждый урок требуется по одной тетради. Витя учится в одном классе с Машей. Нарисуй столько тетрадей, сколько должны взять в школу Маша и Витя. Кто возьмет тетрадей больше?

Как можно показать на рисунке 27, что у Маши столько же тетрадей, сколько у Вити?

1.4. Мама купила яблоки и груши. Они изображены на рисунке 28. Узнай, чего больше: яблок или груш. Чего меньше?

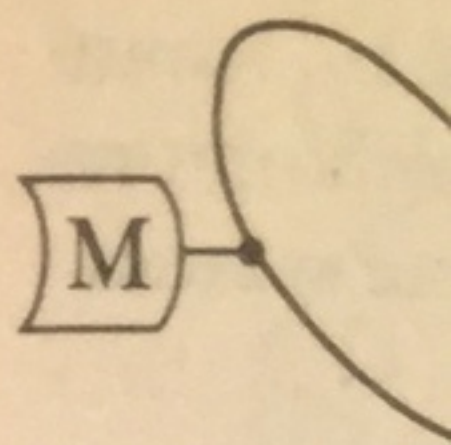


Рис. 27

1.5. У Вити
ражены Ма

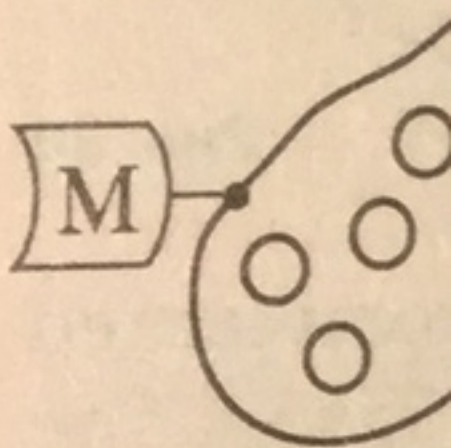


Рис. 29

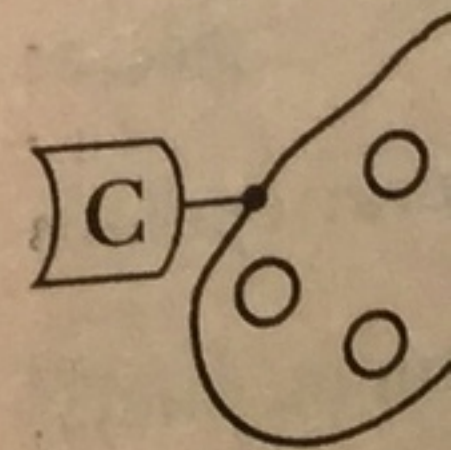
1.6. На р
чтобы каж
или стулье

Приме

2.1. На ст
ко книг, а к
ручек. На р
тетради. Н
Чего больш

2.2. В кл
каждой кле
дого кроли
больше: кле

2.3. Коли
ке равно ко
попугаев. К
эти количес



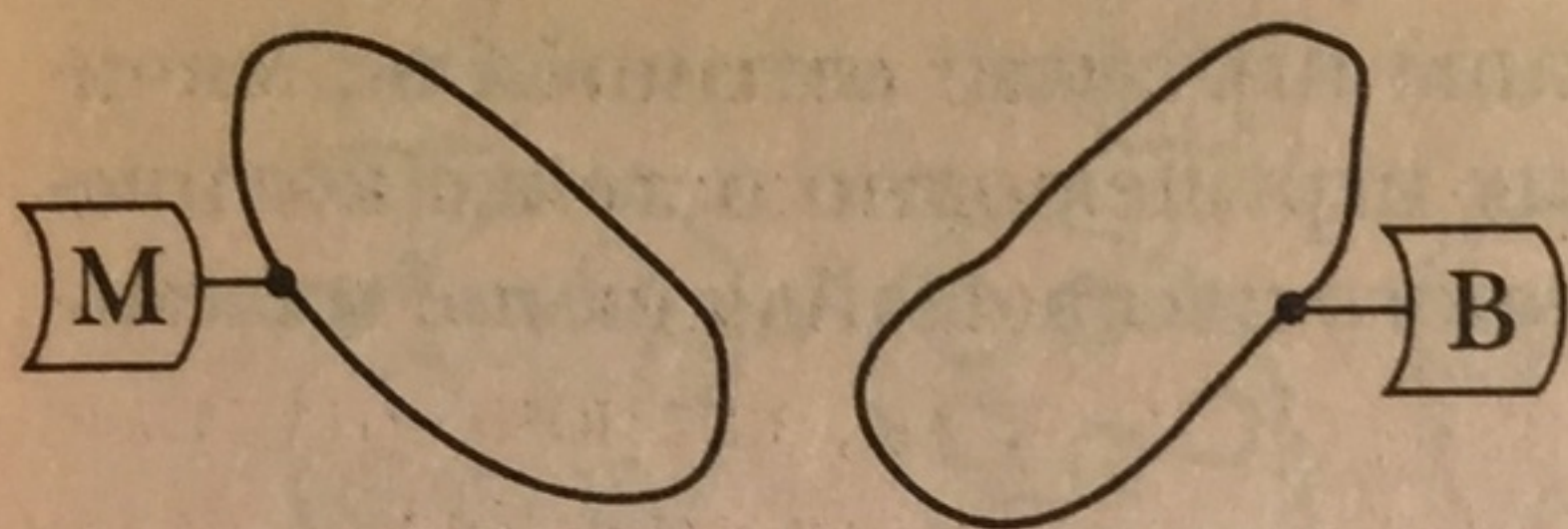


Рис. 27

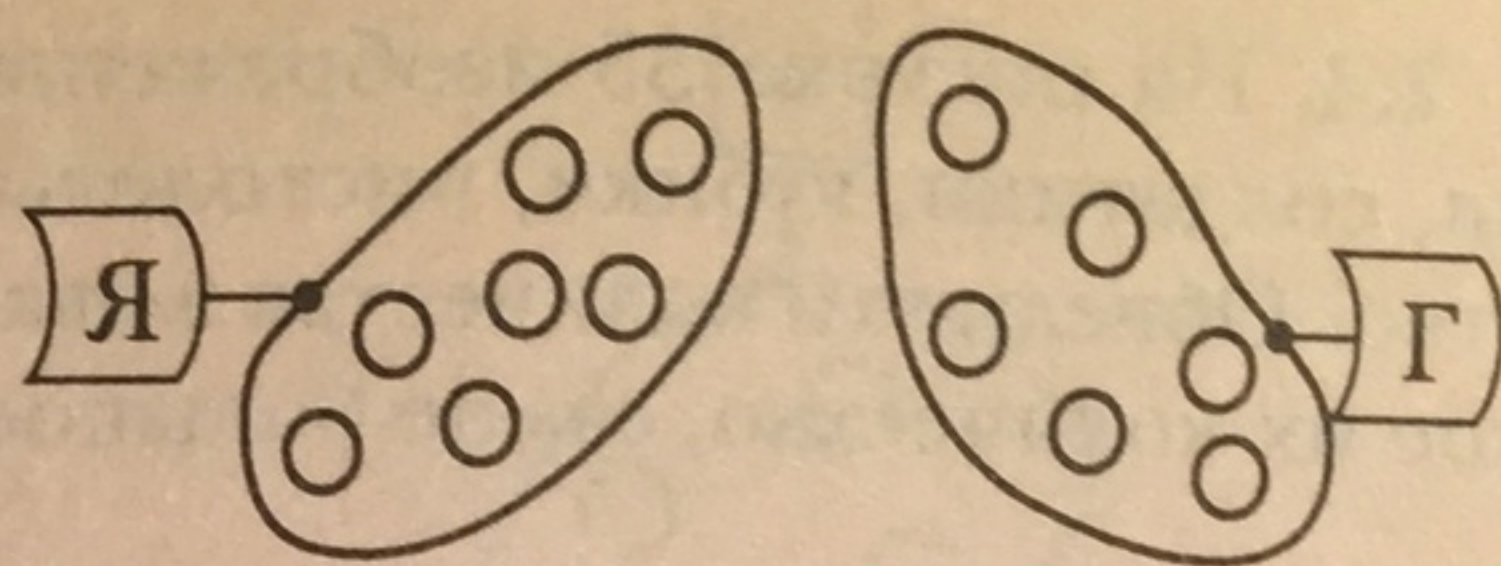


Рис. 28

1.5. У Вити столько же игрушек, сколько у Маши. На рисунке 29 изображены Машины игрушки. Нарисуй Витины игрушки.

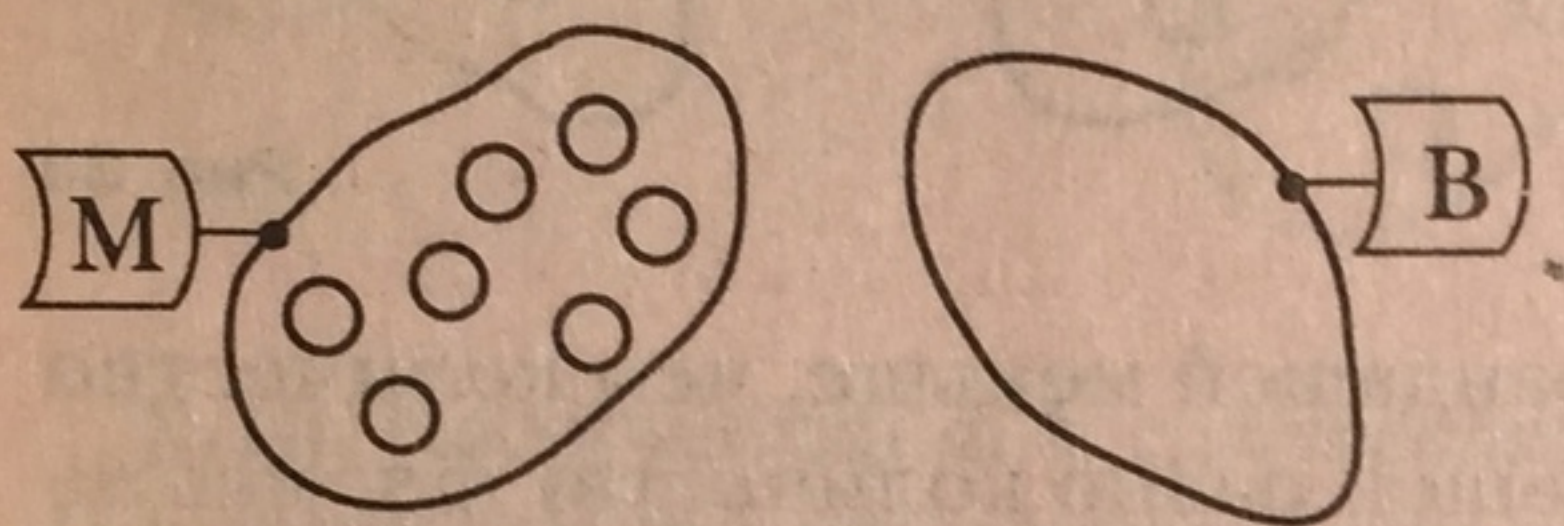


Рис. 29

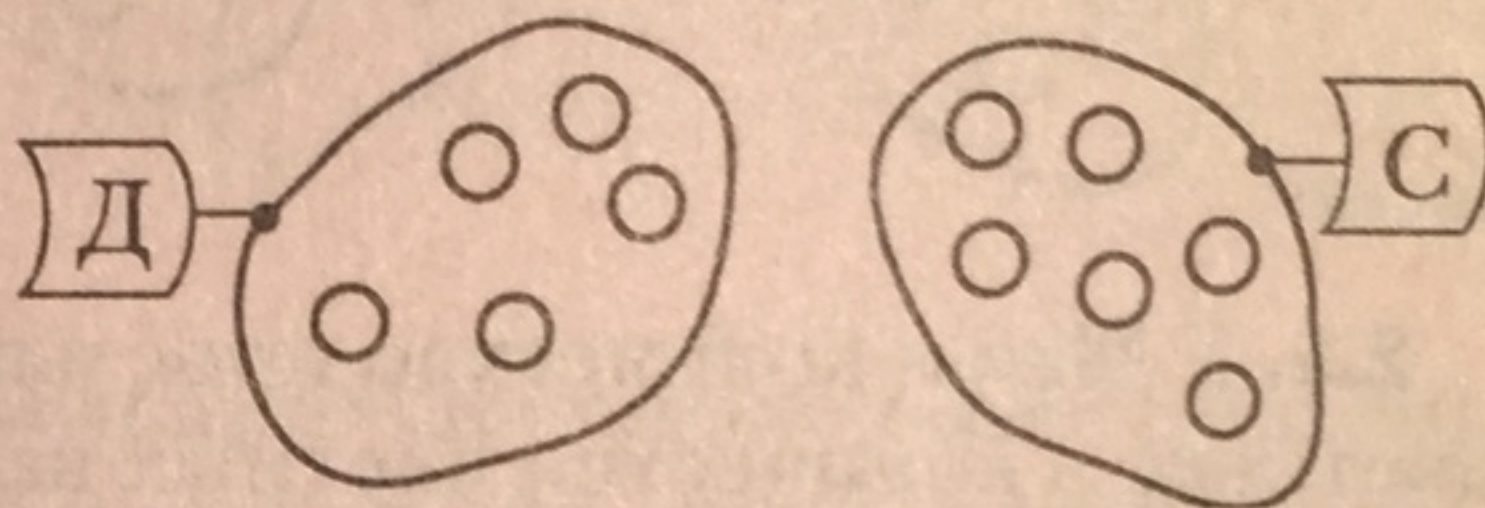


Рис. 30

1.6. На рисунке 30 изображены дети и стулья. Хватит ли стульев, чтобы каждого ребенка посадить на один стул? Чего больше: детей или стульев?

Пример 2

2.1. На столе лежат тетради, книги, ручки. Тетрадей столько же, сколько книг, а книг столько же, сколько ручек. На рисунке 31 изображены тетради. Нарисуй книги и ручки. Чего больше: тетрадей или ручек? Как это можно узнать?

2.2. В клетках сидят кролики. В каждой клетке — по кролику, у каждого кролика — по морковке. Чего больше: клеток или морковок?

2.3. Количество слонов в зоопарке равно количеству бегемотов, а количество обезьян равно количеству попугаев. Каково количество бегемотов и попугаев. Нарисуй их. Сравни эти количества.

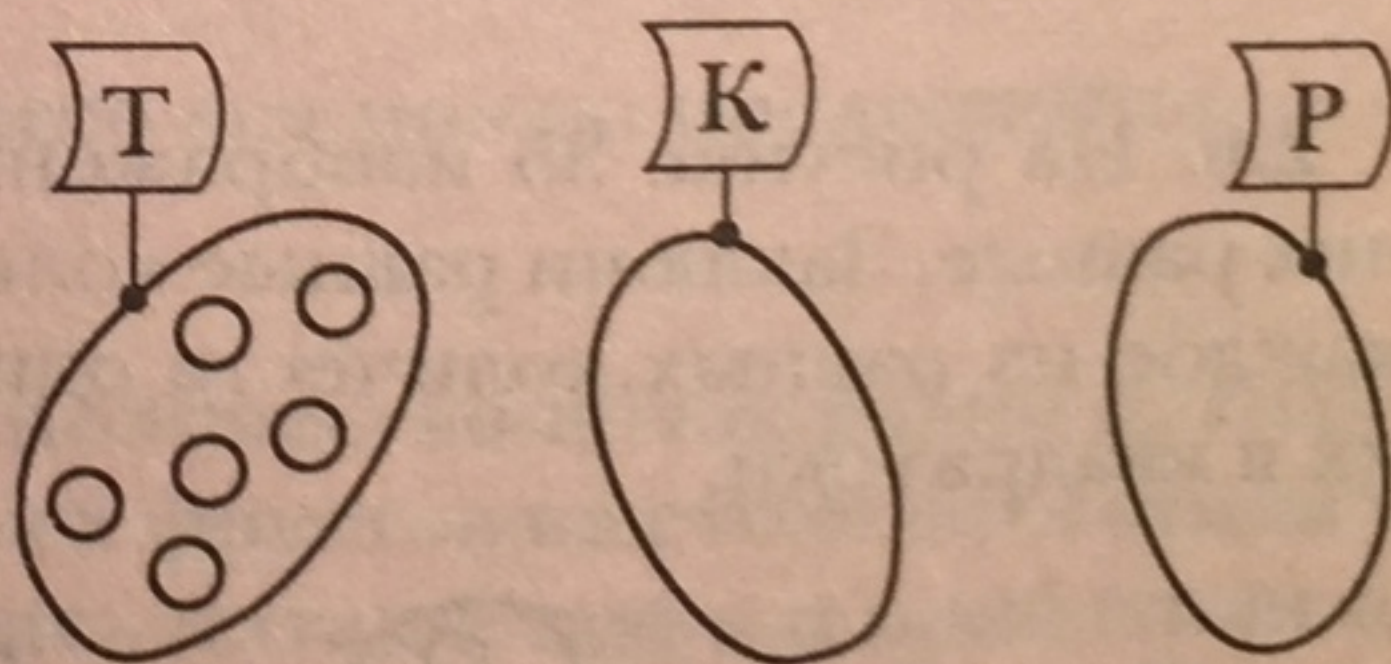


Рис. 31

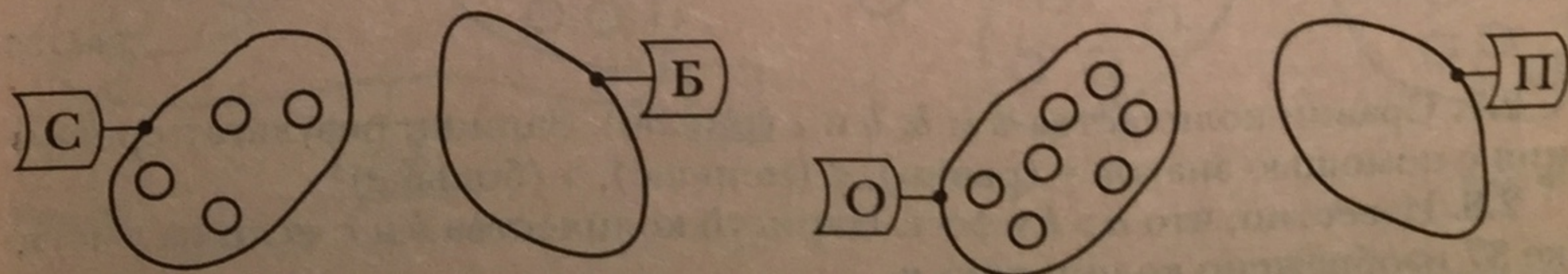


Рис. 32

2.4. На рисунке 33 изображены Петины игрушки: автомобиль, мячики, солдатики, кубики, пистолеты. Каких игрушек одно и то же количество? Обведи эти количества в овалы разного цвета. Найди самое маленькое их количество, самое большое.

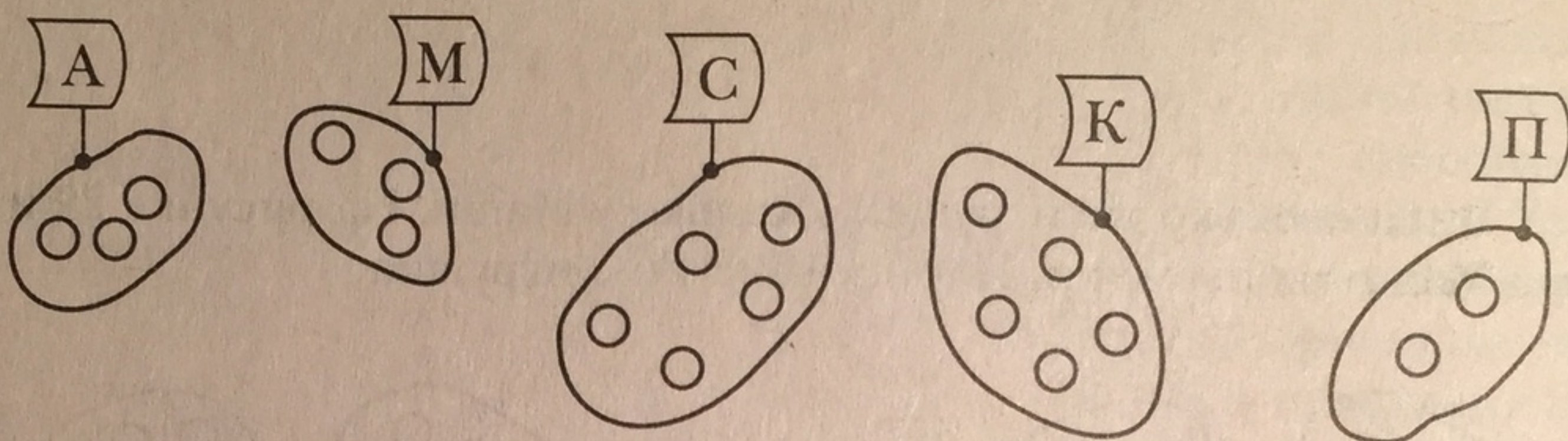


Рис. 33

2.5. У Маши количество простых карандашей меньше, чем количество цветных, а количество цветных карандашей равно количеству фломастеров. На рисунке 34 изображено количество простых карандашей. Нарисуй количества цветных карандашей и фломастеров.

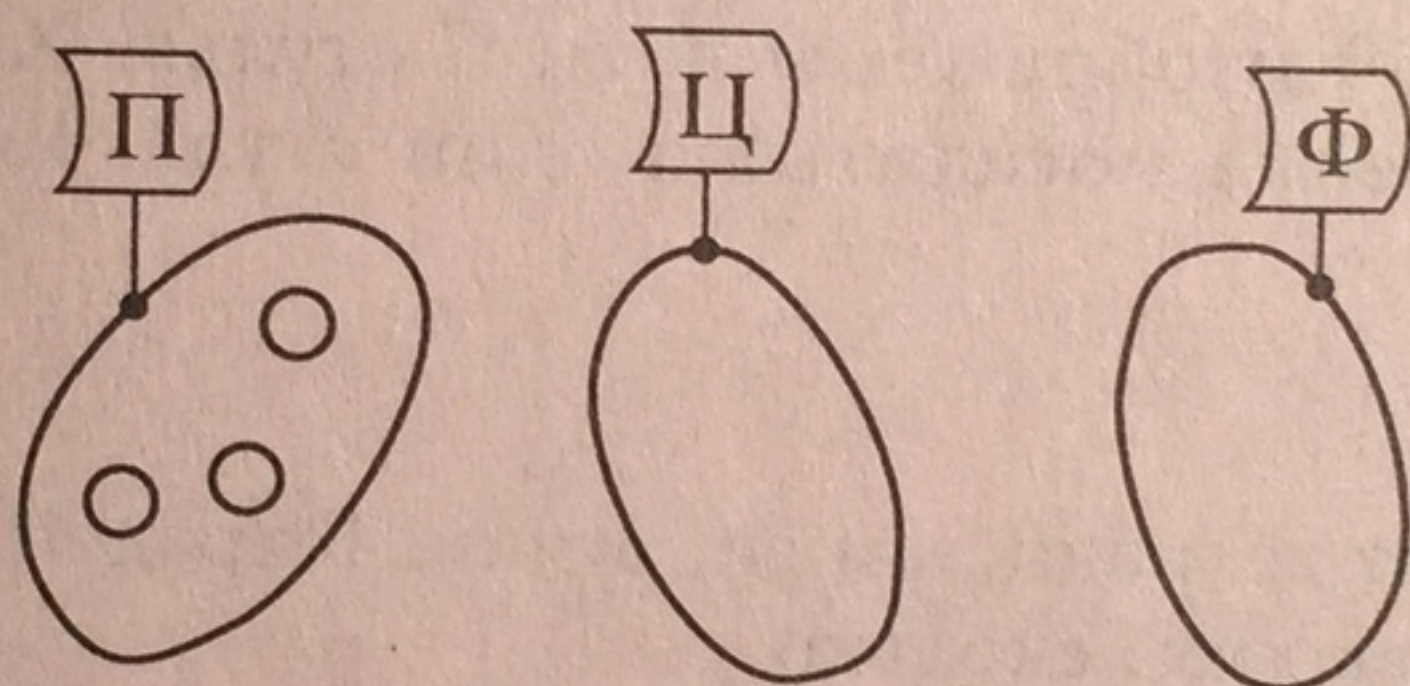


Рис. 34

2.6. На рисунке 35 изображены различные количества. Найди среди них равные. Заклужи равные количества в овалы разного цвета. Обозначь каждое из равных количеств одной и той же строчной буквой. Запиши их в квадратики.

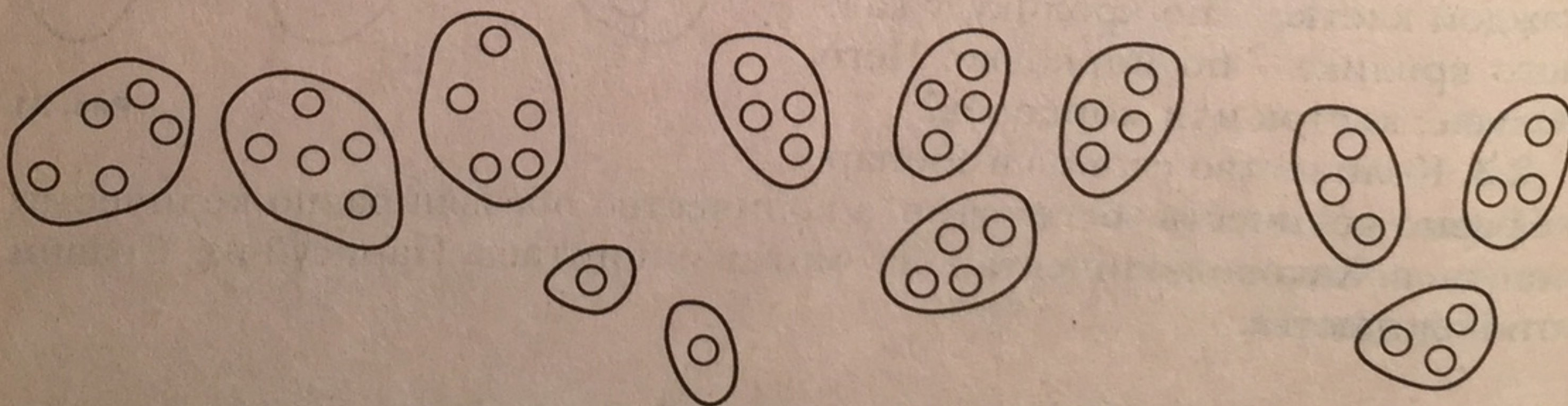


Рис. 35

2.7. Сравни количества a и b , b и c (рис.36). Запиши результат сравнения с помощью знаков $=$ (равно), $<$ (меньше), $>$ (больше).

2.8. Известно, что $a > b$ и $b > c$. Нарисуй количества b и c , если на рисунке 37 изображено количество a .

2.9. Расположи количества, изображенные на рисунке 38 так в ряд, чтобы каждое большее было в ряду справа от каждого меньшего.

Рис. 36

2.10. Нарисуй количество...

Рис. 39

2.11.

Пр

3.1.

чество
и b . Ее
или a
личет

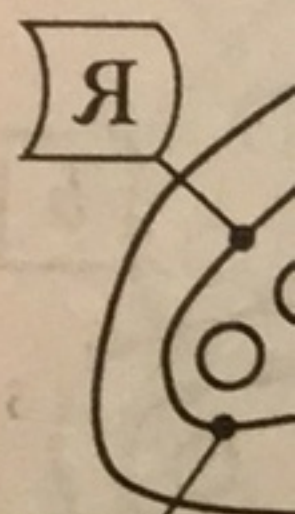


Рис. 41

3.2. К
сумму.

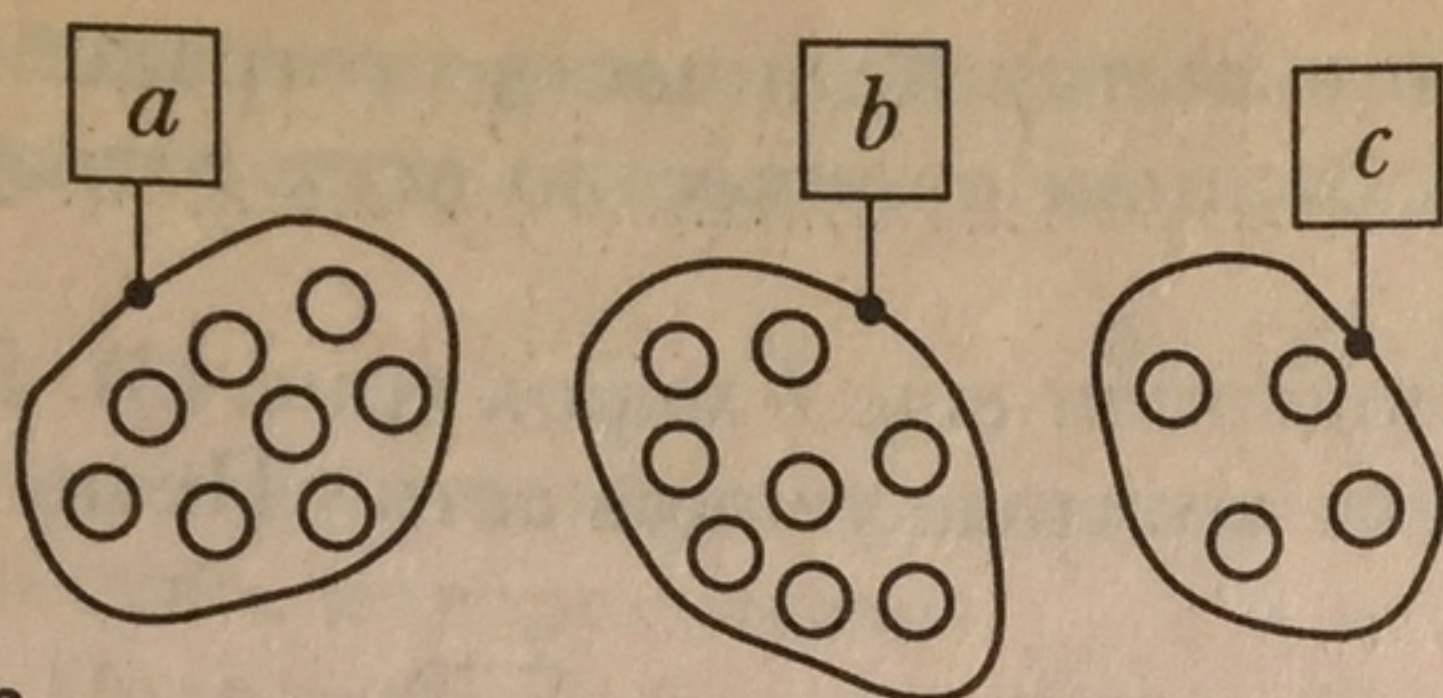


Рис. 36

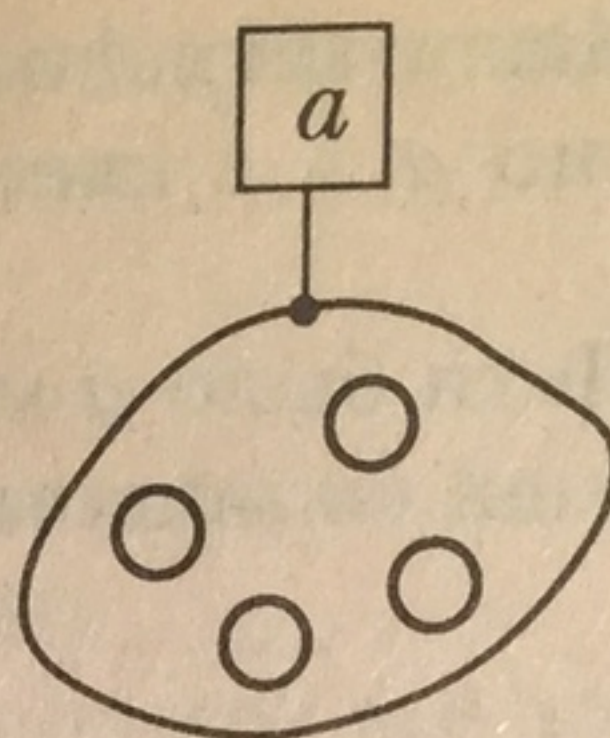


Рис. 37

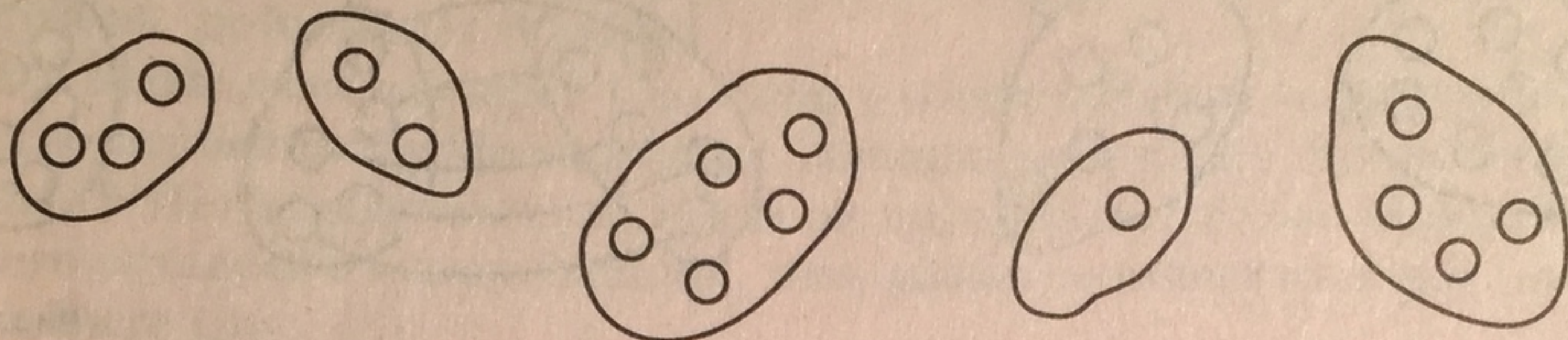


Рис. 38

2.10. Количества a , b , c , d говорят стрелками: «Я больше тебя» (рис.39). Нарисуй такие количества и так расположи их в ряд, чтобы каждое меньшее было справа от каждого большего.

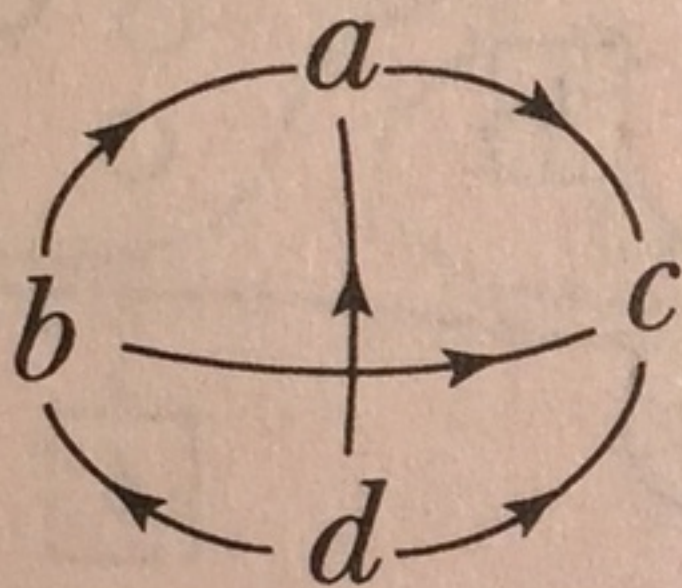


Рис. 39

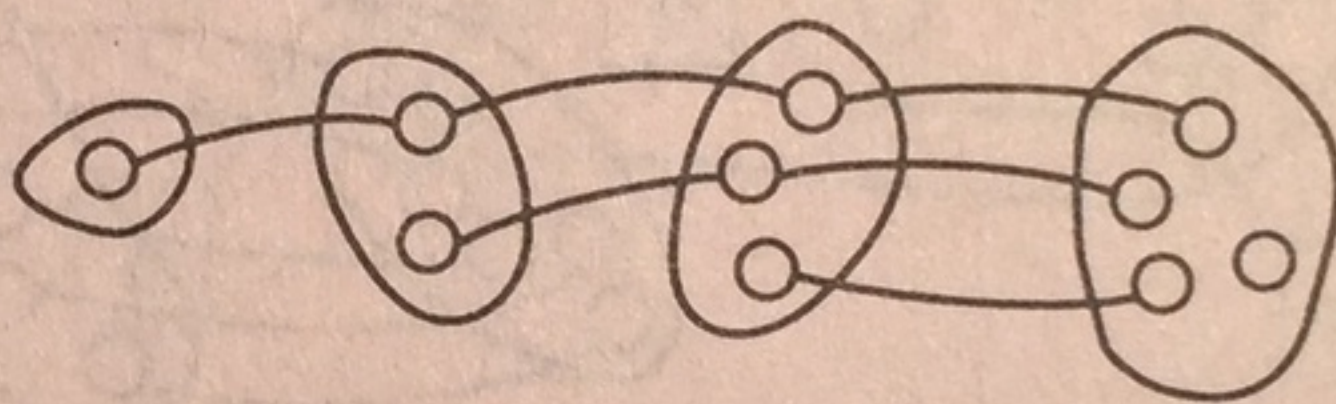


Рис. 40

2.11. Продолжи ряд (рис.40). Как далеко его можно продолжить?

Пример 3

3.1. На столе лежат яблоки и груши. Количество яблок равно a , количество груш — b (рис. 41). Количество всех фруктов на столе есть сумма a и b . Ее записывают как $a + b$. Такую запись читают так: к a прибавили b , или a и b сложили, или a плюс b , или выполнили действие сложения количеств a и b .

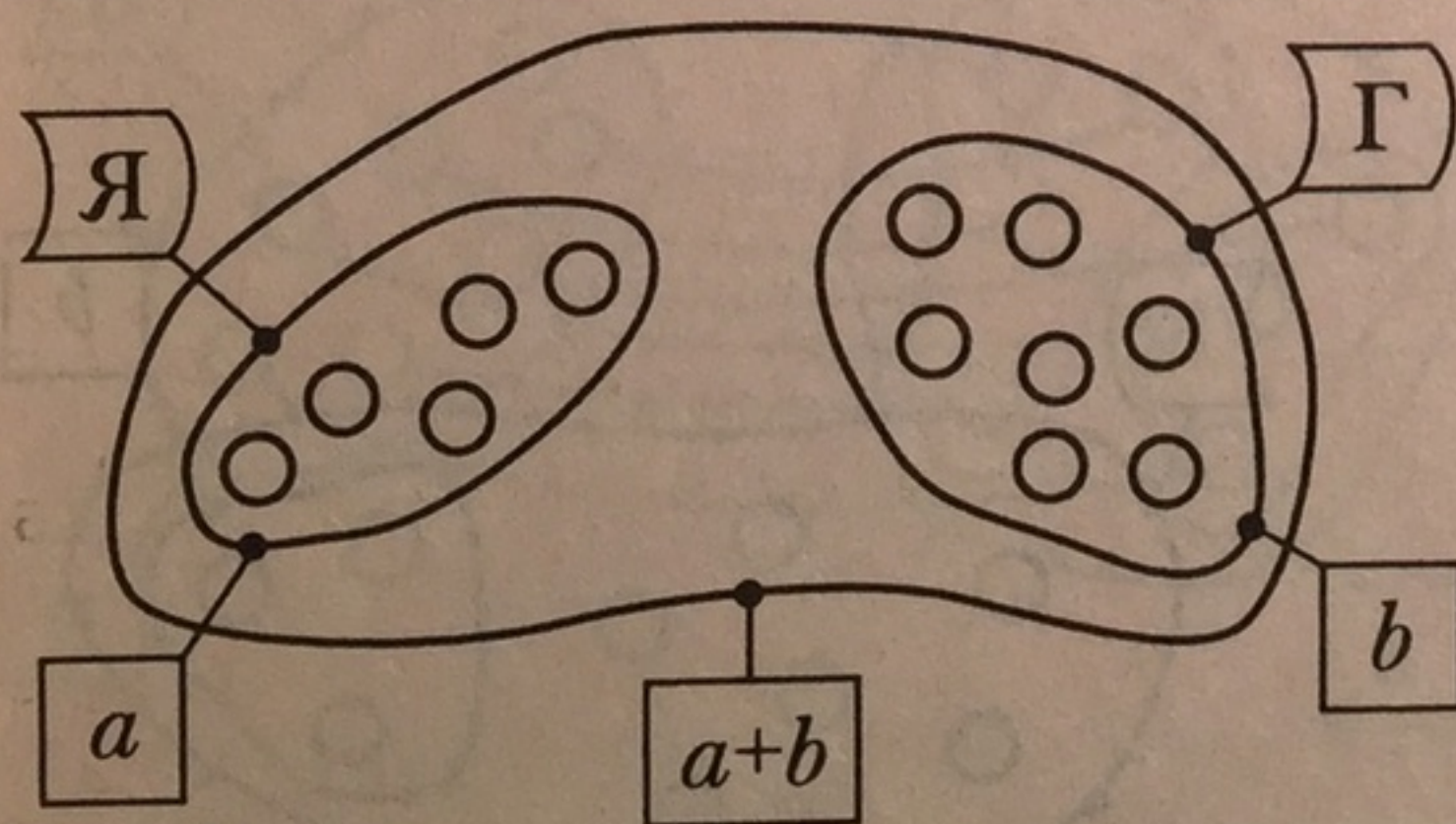


Рис. 41

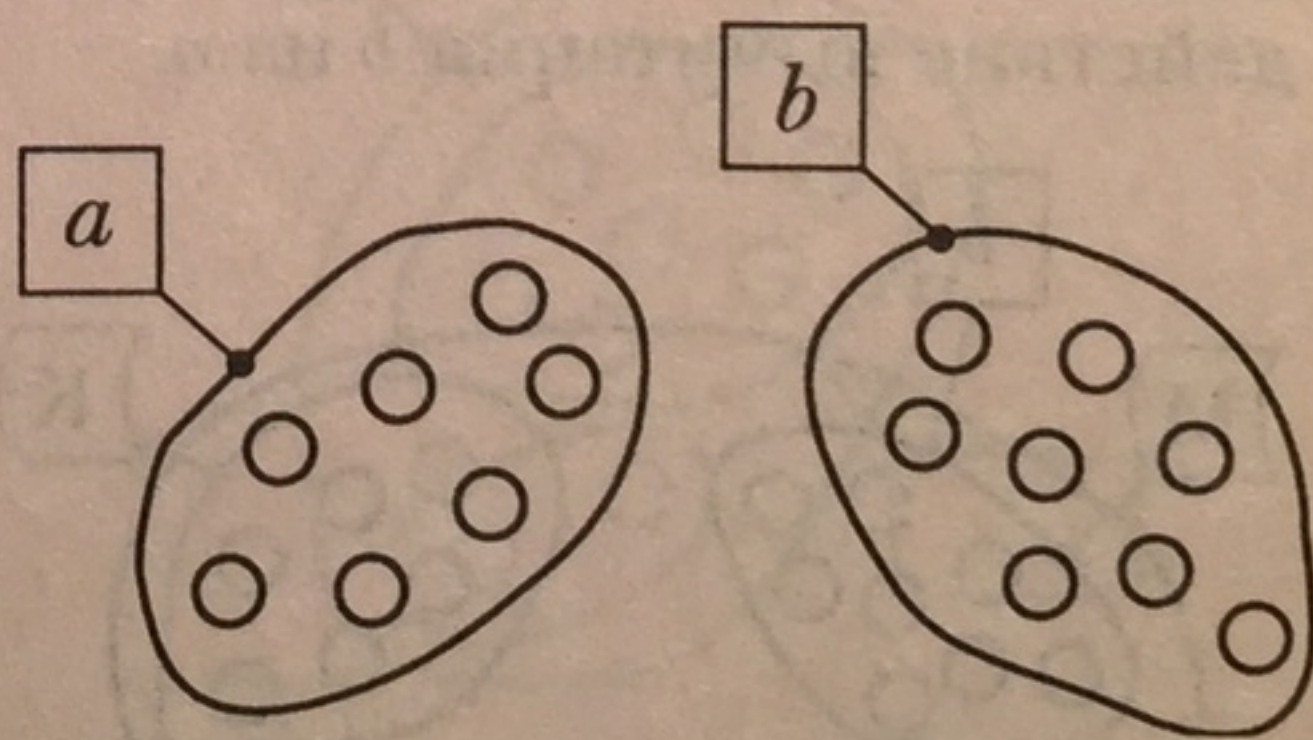


Рис. 42

3.2. Количества a и b изображены на рисунке 42. Нарисуй и запиши их сумму.

3.3. У Маши тетради в линейку и в клетку. Количество тетрадей в линейку равно a , а в клетку равно b . Запиши количество всех тетрадей у Маши.

3.4. У Пети было a марок. Ему подарили еще b марок (рис. 43). Нарисуй и запиши количество всех марок, которые теперь есть у Пети.

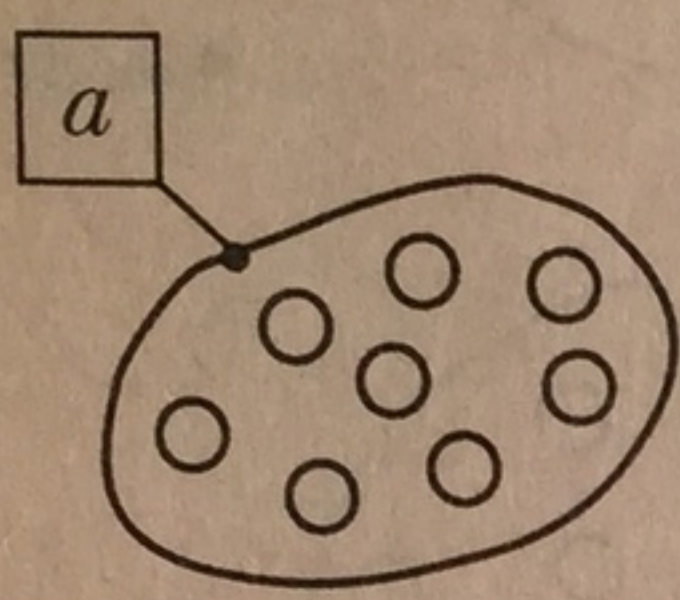


Рис. 43

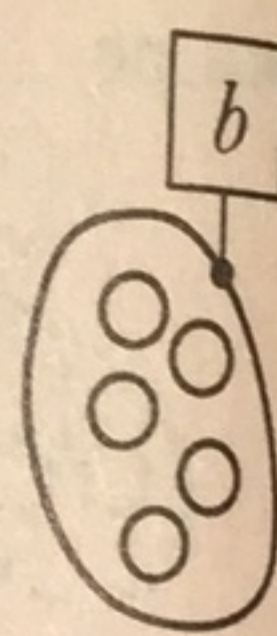
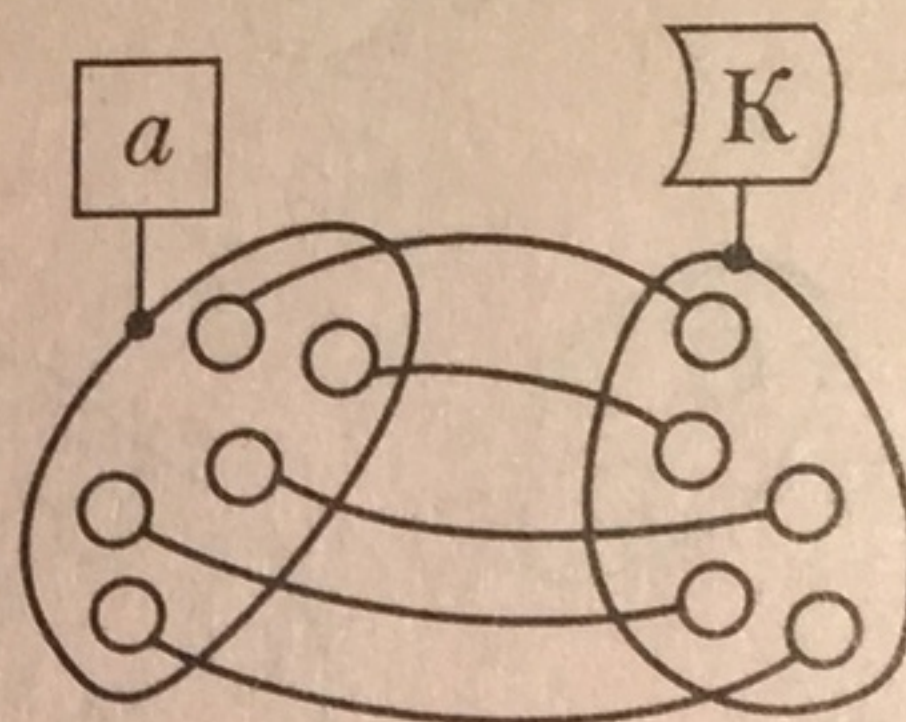
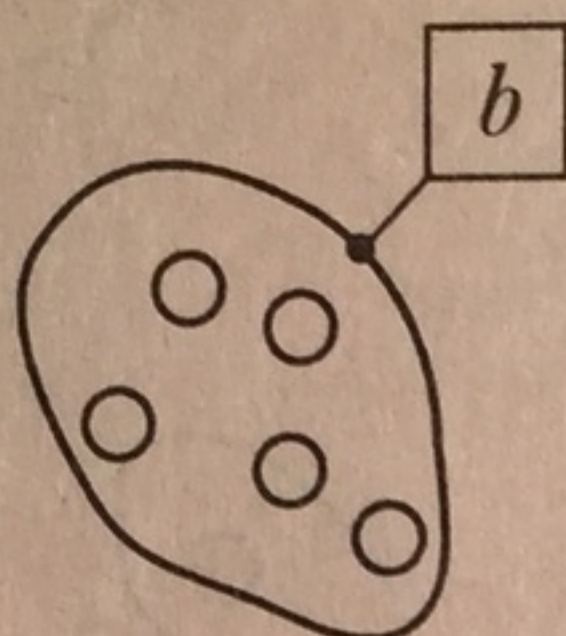


Рис. 44

3.5. У Кати a карандашей, а у Тани на b карандашей больше (рис. 44). Нарисуй и запиши, чему равно количество карандашей у Тани.

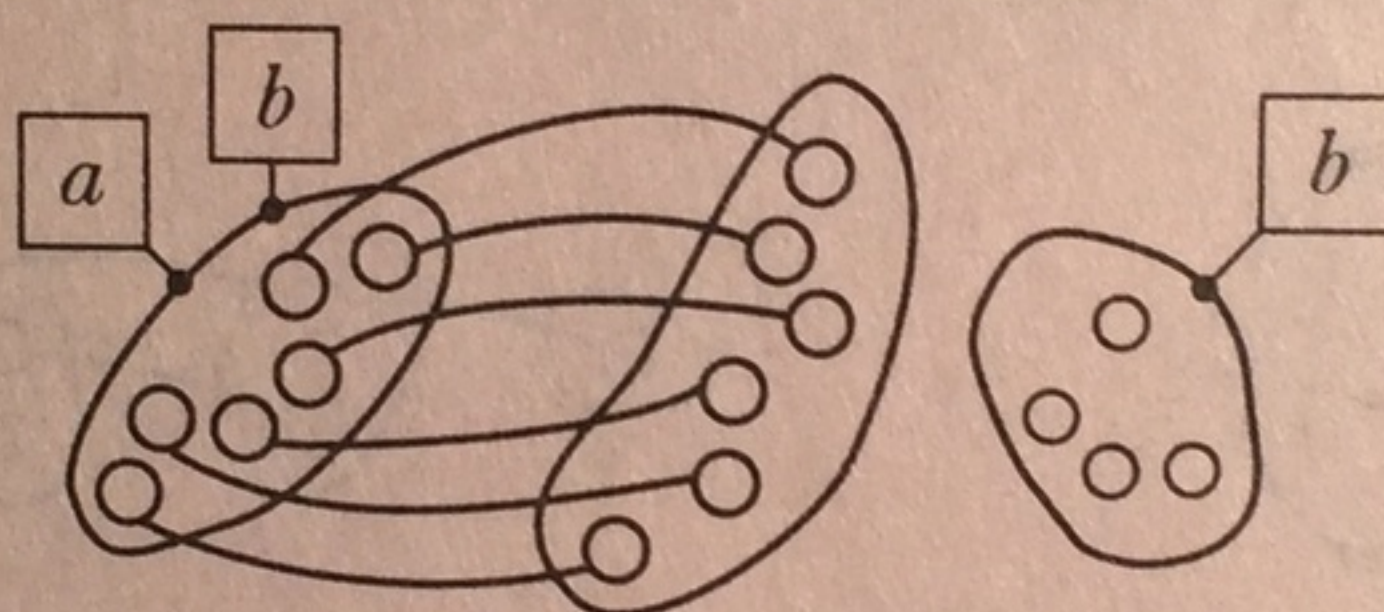


Рис. 45

3.6. Количество солдатиков у Васи равно a , их на b меньше, чем у Пети (рис. 45). Нарисуй и запиши, чему равно количество солдатиков у Пети.

Пример 4

4.1. У Маши с Катей вместе a карандашей. У Маши b карандашей. Карандаши Кати и Маши изображены на рисунке 46. Количество карандашей у Кати есть разность количества карандашей у обеих девочек вместе и количества карандашей у Маши. Такую разность записывают как $a - b$. Ее можно прочесть так: из a вычли b , или a минус b , или выполнили действие вычитания b из a .

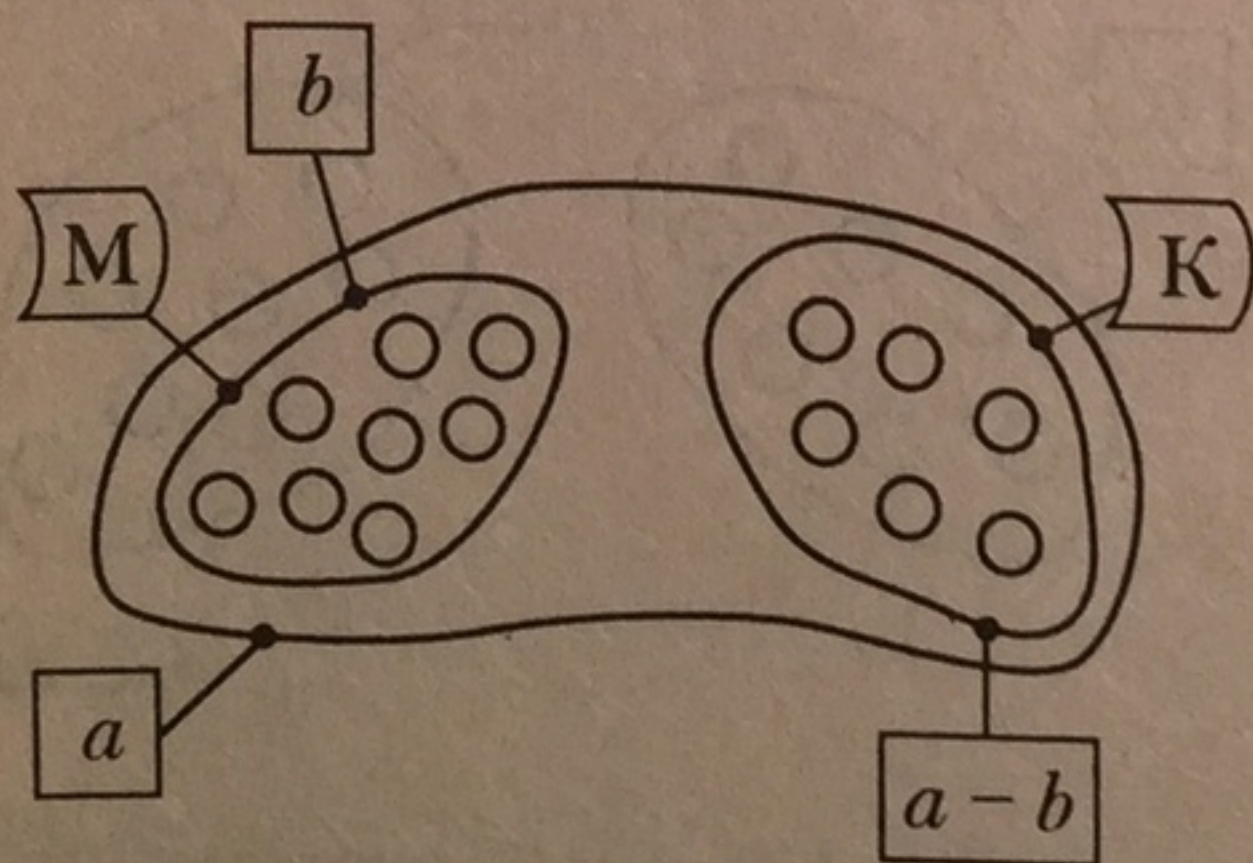


Рис. 46

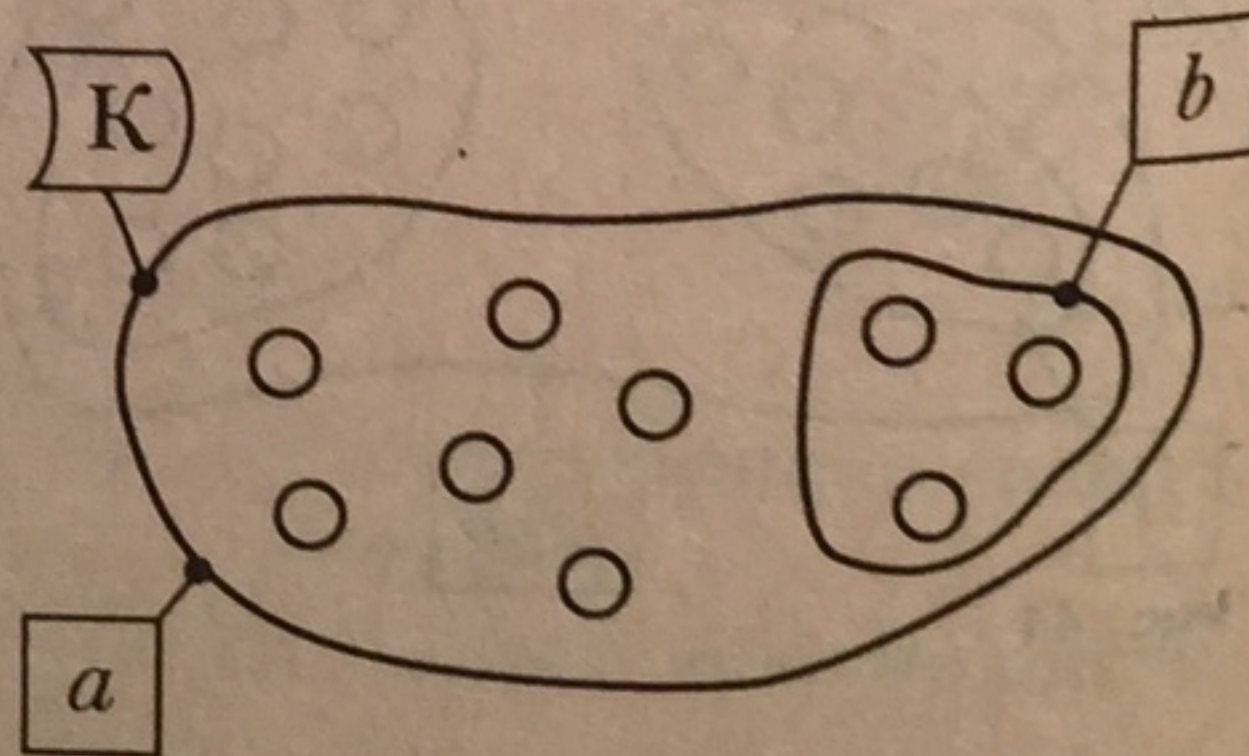


Рис. 47

Запиши,
кому колич

Вставь пр
количество

4.2. Петя
рыбки вмес
во рыбок, п

4.3. Маше
чество оста

4.4. У Пе
у него остал
ных Вите (р

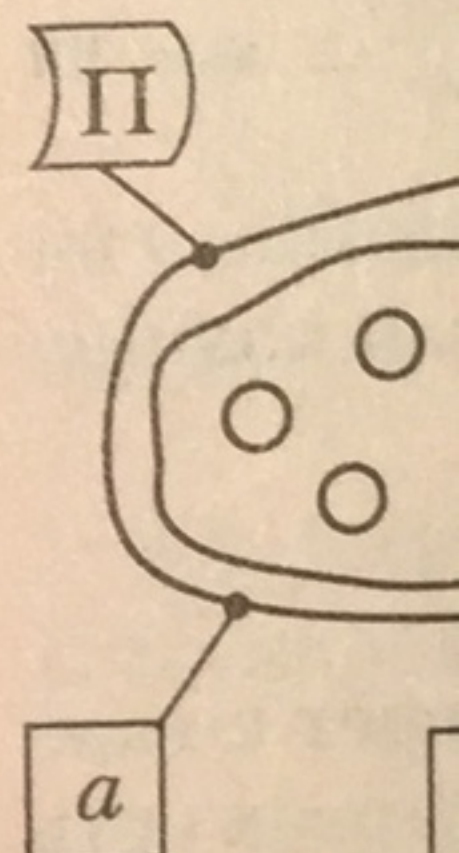


Рис. 48

4.5. На р
сказ к этом

4.6. У шк
ство ёлок н

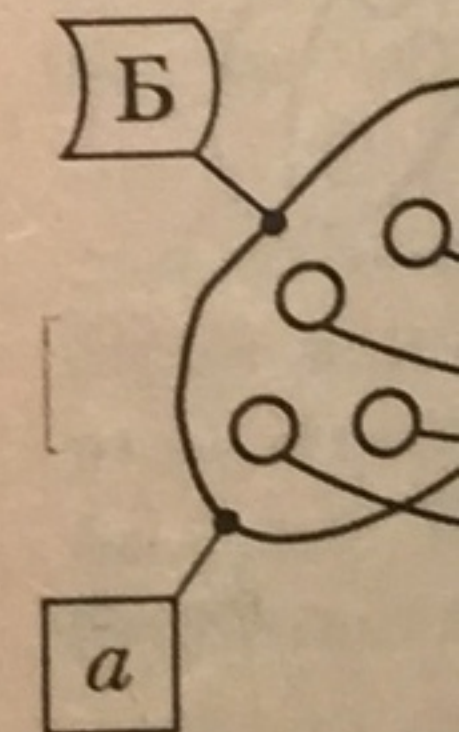


Рис. 50

4.7. У Ка
личество к

Запиши, чему равна сумма количеств карандашей у Кати и Маши. Какому количеству она равна? Что означает равенство

$$b + (a - b) = a.$$

Вставь пропущенные слова в предложении: разность $a - b$ — это такое количество, которое нужно ___ с b , чтобы получить ____.

4.2. Петя поймал b рыбок. Когда Петя и Юра сложили все пойманные рыбки вместе, то их количество оказалось равным a . Запиши количество рыбок, пойманных Юрой.

4.3. Маше дали a конфет. Она съела b конфет. Найди на рисунке 47 количество оставшихся у Маши конфет. Запиши, чему равно это количество.

4.4. У Пети было a марок. Когда он подарил несколько марок Вите, то у него осталось b марок. Запиши, чему равно количество марок, подаренных Вите (рис. 48).

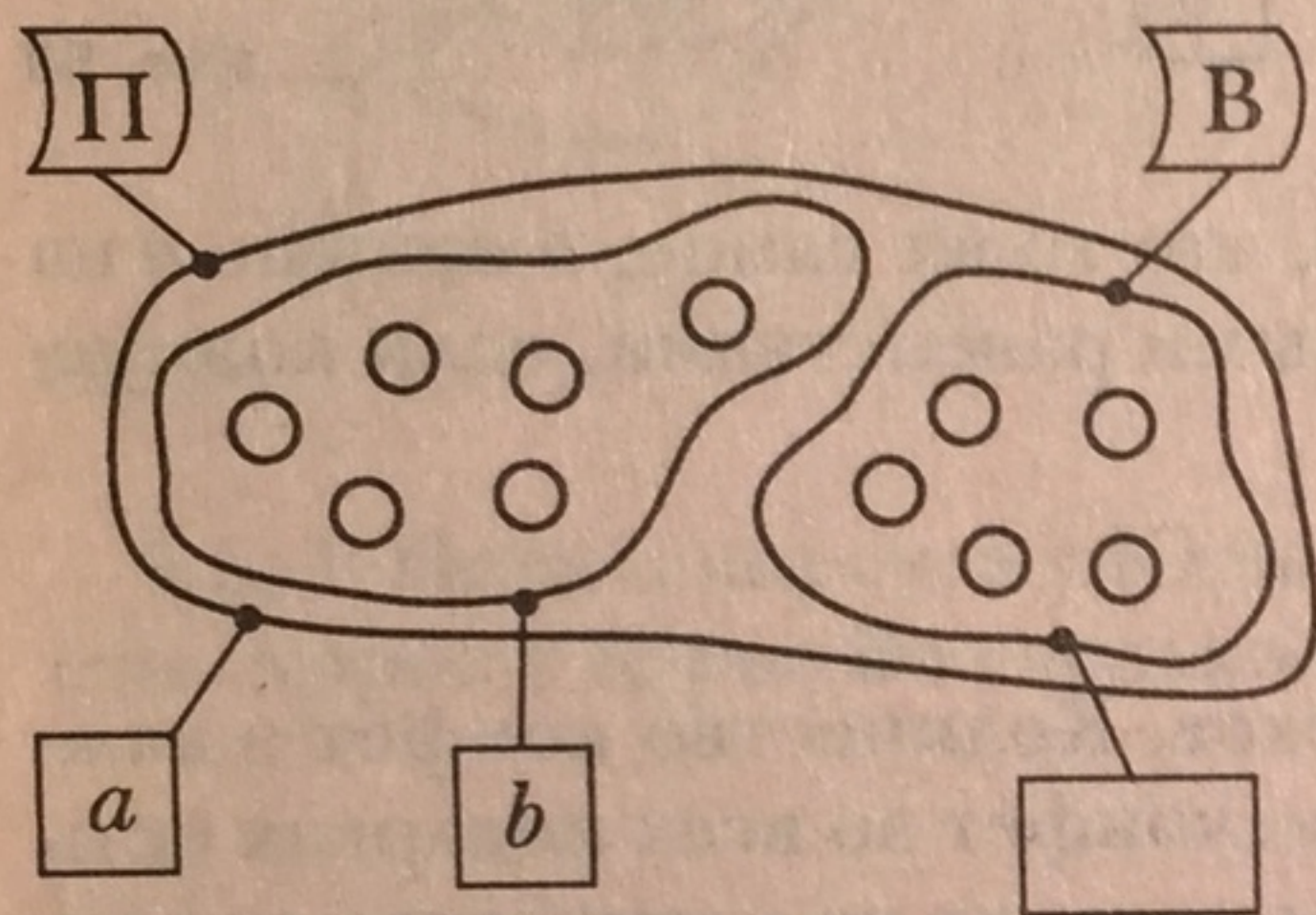


Рис. 48

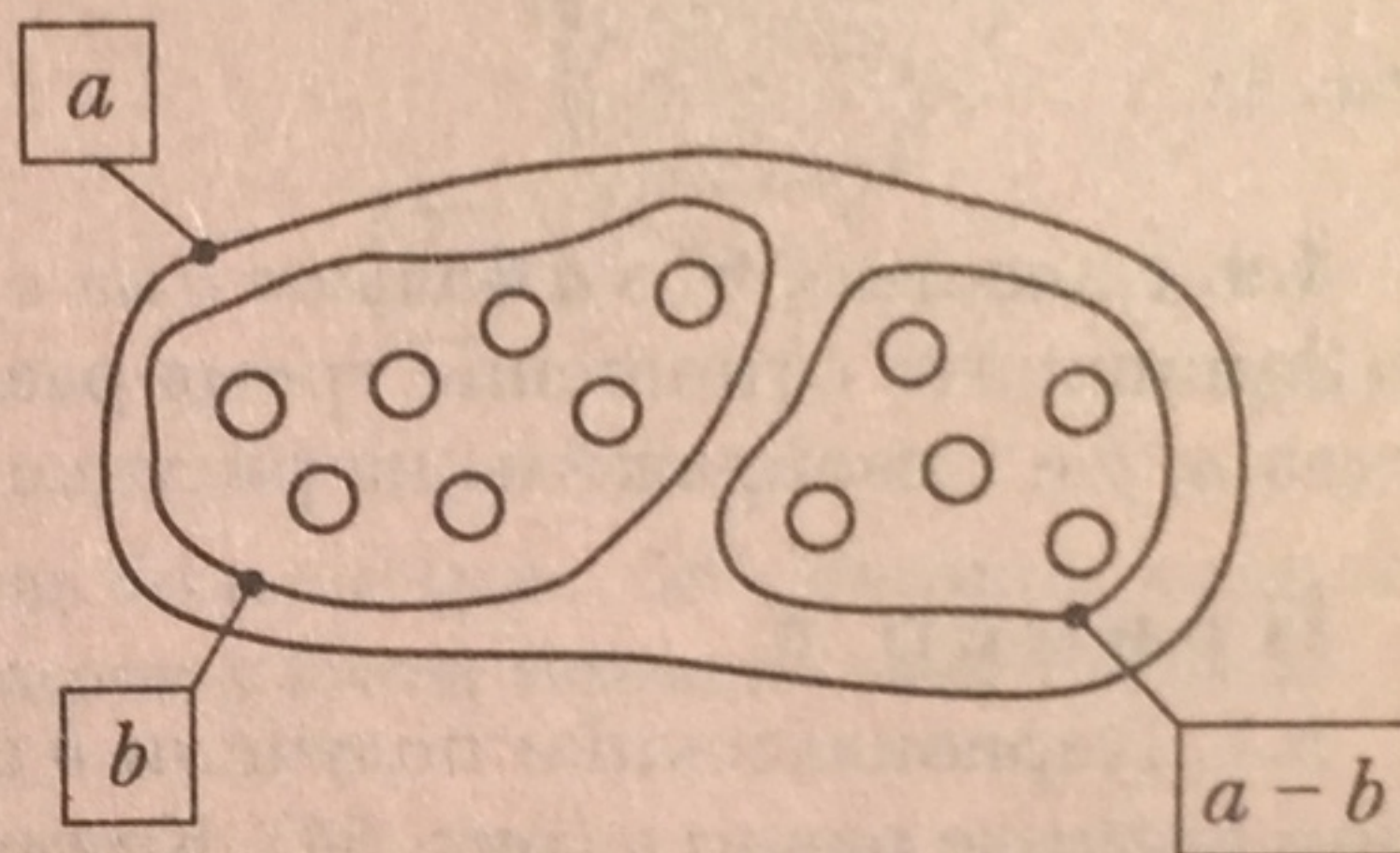


Рис. 49

4.5. На рисунке 49 изображены количества: a , b , $a - b$. Придумай рассказ к этому рисунку.

4.6. У школы растут березы и ёлки. Количество берез равно a , количество ёлок на b меньше. Запиши, чему равно количество ёлок (рис. 50).

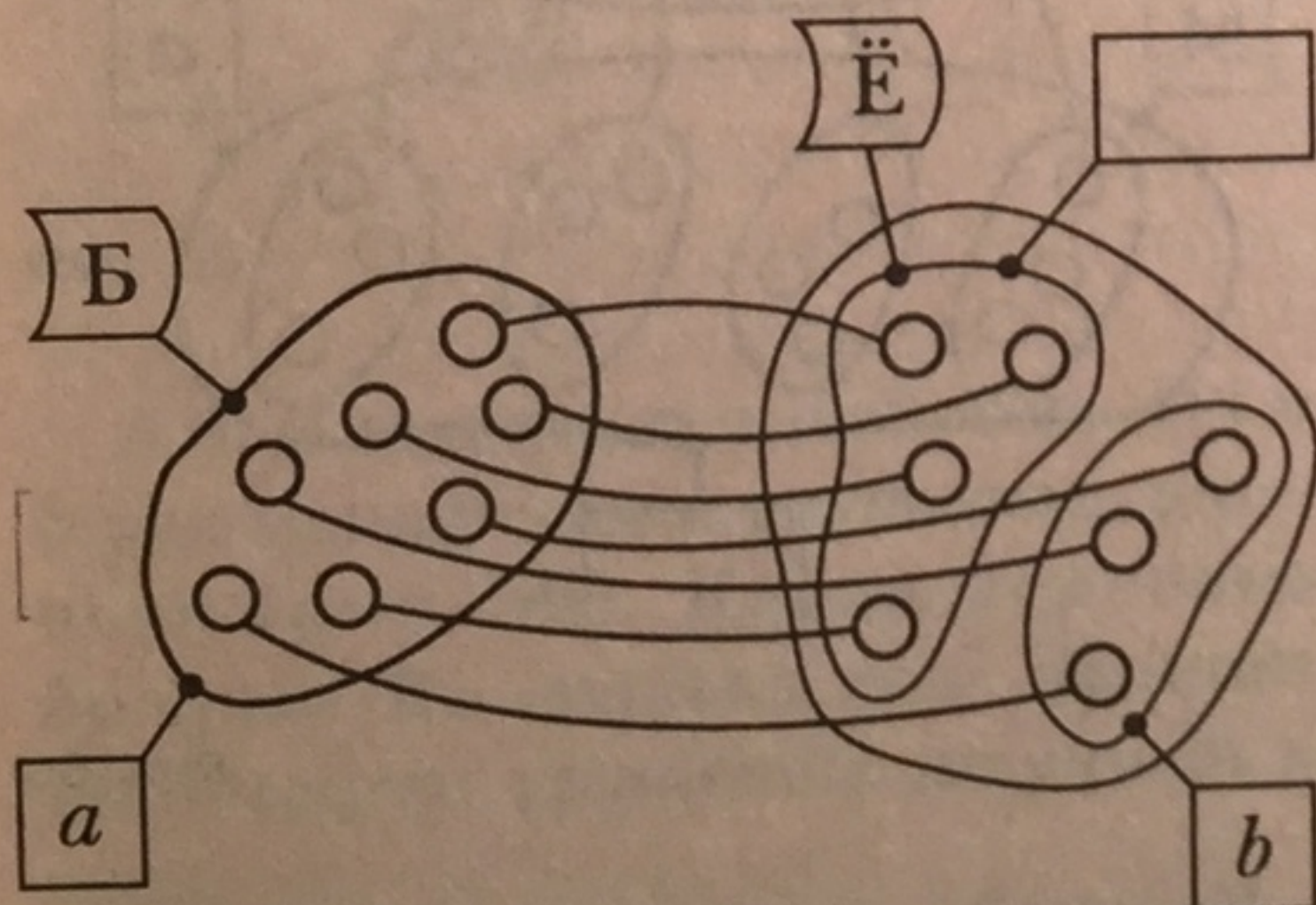


Рис. 50

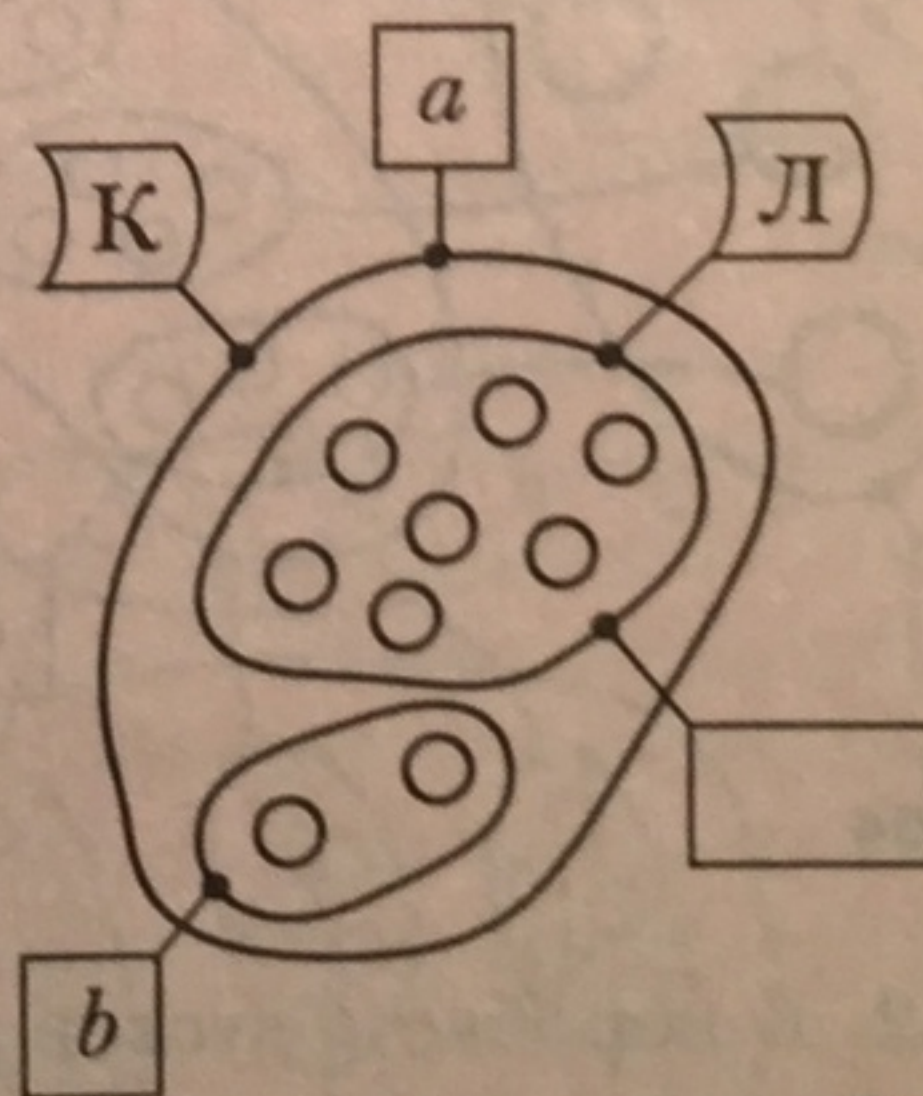


Рис. 51

4.7. У Кати a кукол. Их на b больше, чем у Лены (рис. 51). Запиши количество кукол у Лены.

4.8. На столе лежат a карандашей и b ручек. Они изображены на рисунке 52. Чего больше, карандашей или ручек? Нарисуй то количество, на которое карандашей больше, чем ручек (ручек меньше, чем карандашей). Запиши, чему оно равно.

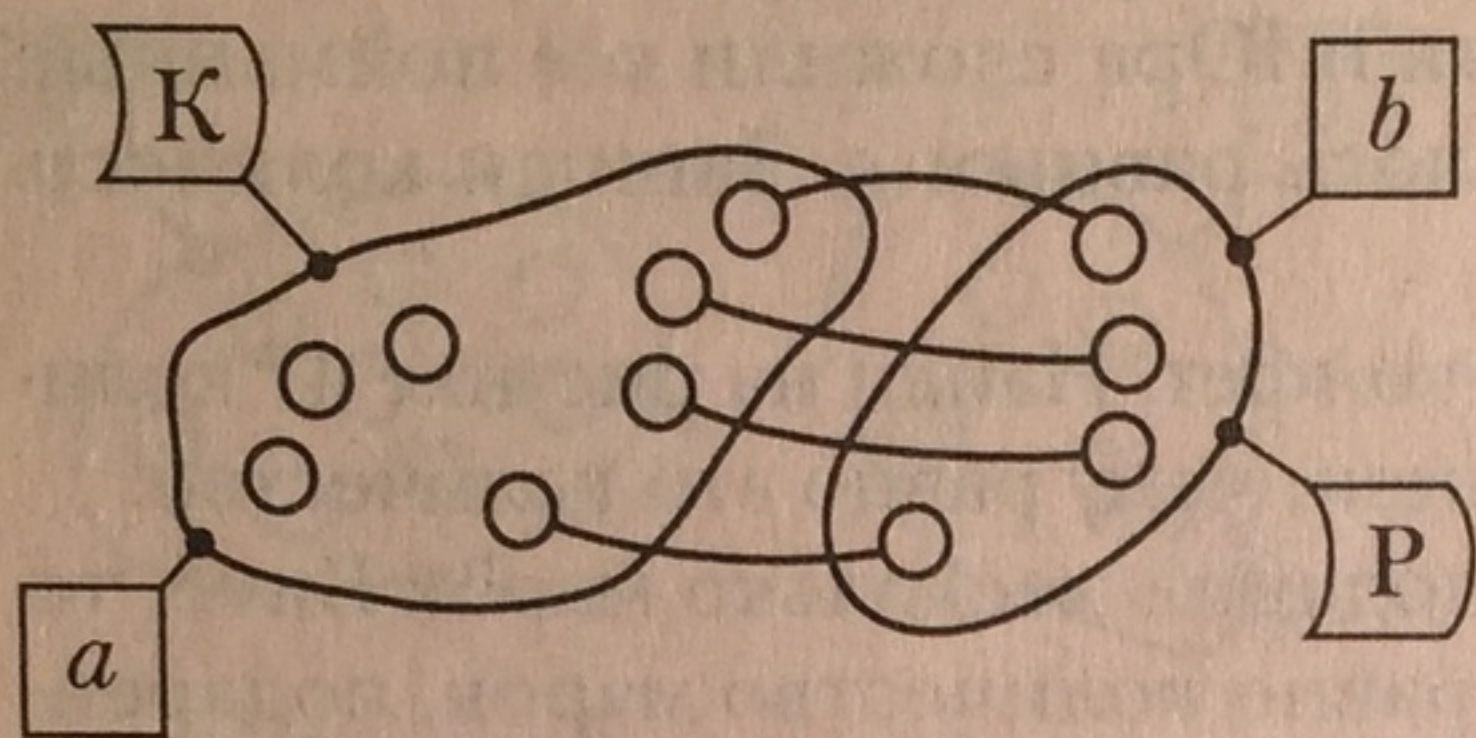


Рис. 52

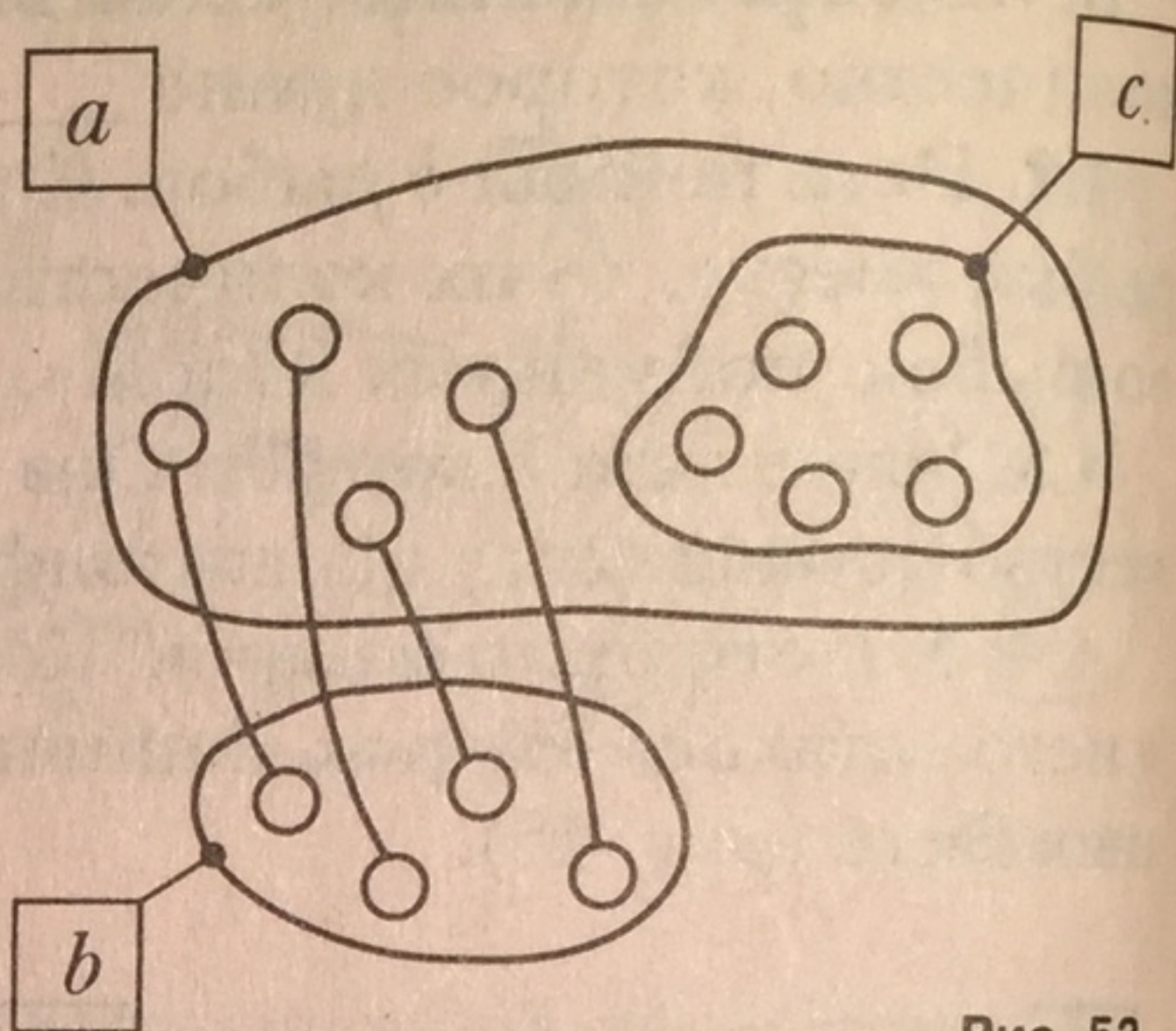


Рис. 53

4.9. Известно, что a больше b на c . Или, что то же самое, b меньше a на c . Запиши это отношение тремя различными равенствами, если количества a , b и c изображены на рисунке 53.

Пример 5

5.1. Первоклассники получили b подарков. Количество конфет в каждом подарке равно a (рис. 54). Количество конфет во всех подарках есть произведение количества конфет в одном подарке на количество подарков. Его записывают как $a \cdot b$. Это выражение можно прочесть так: a умножили на b , или выполнили действие умножения.

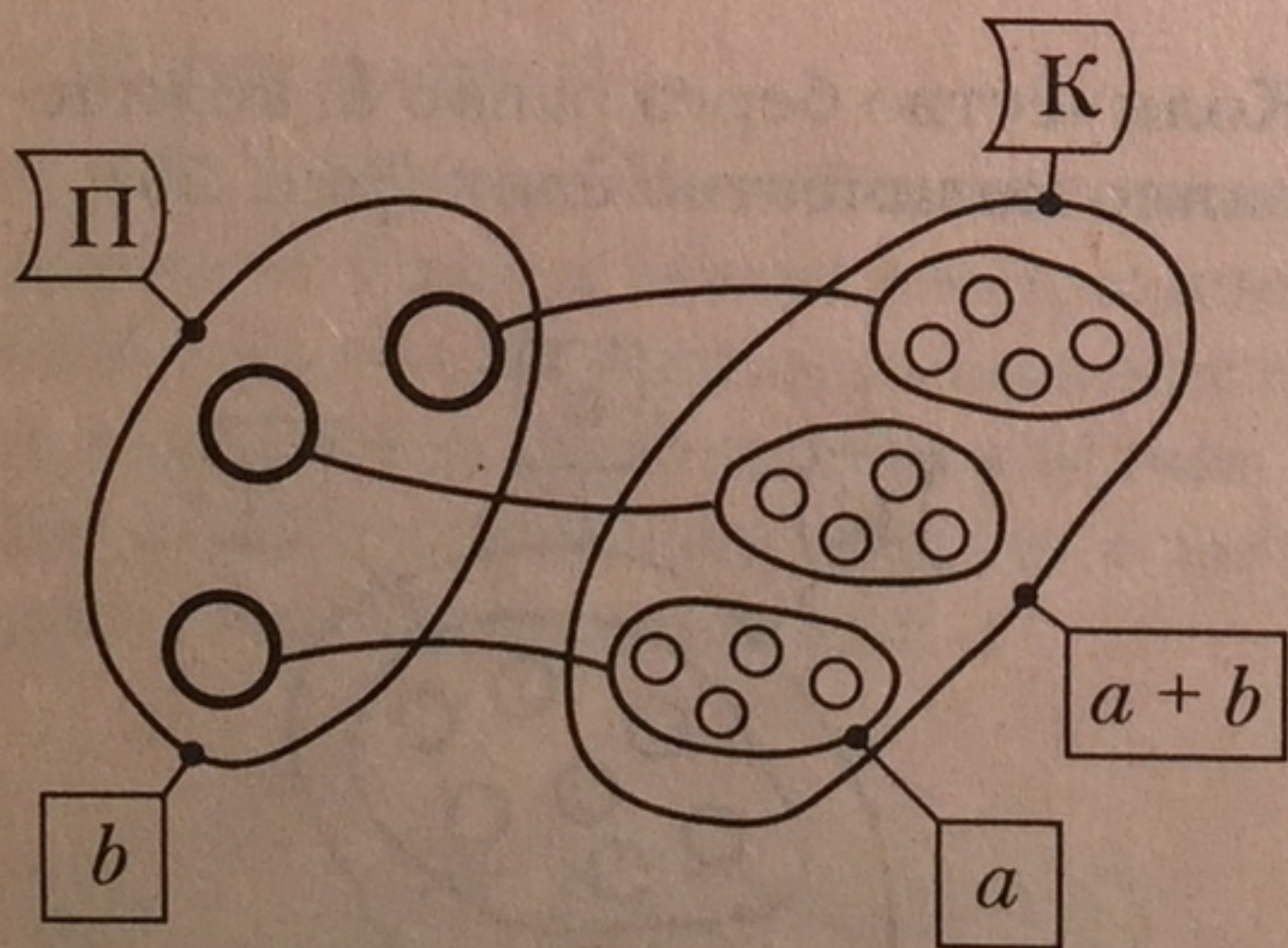


Рис. 54

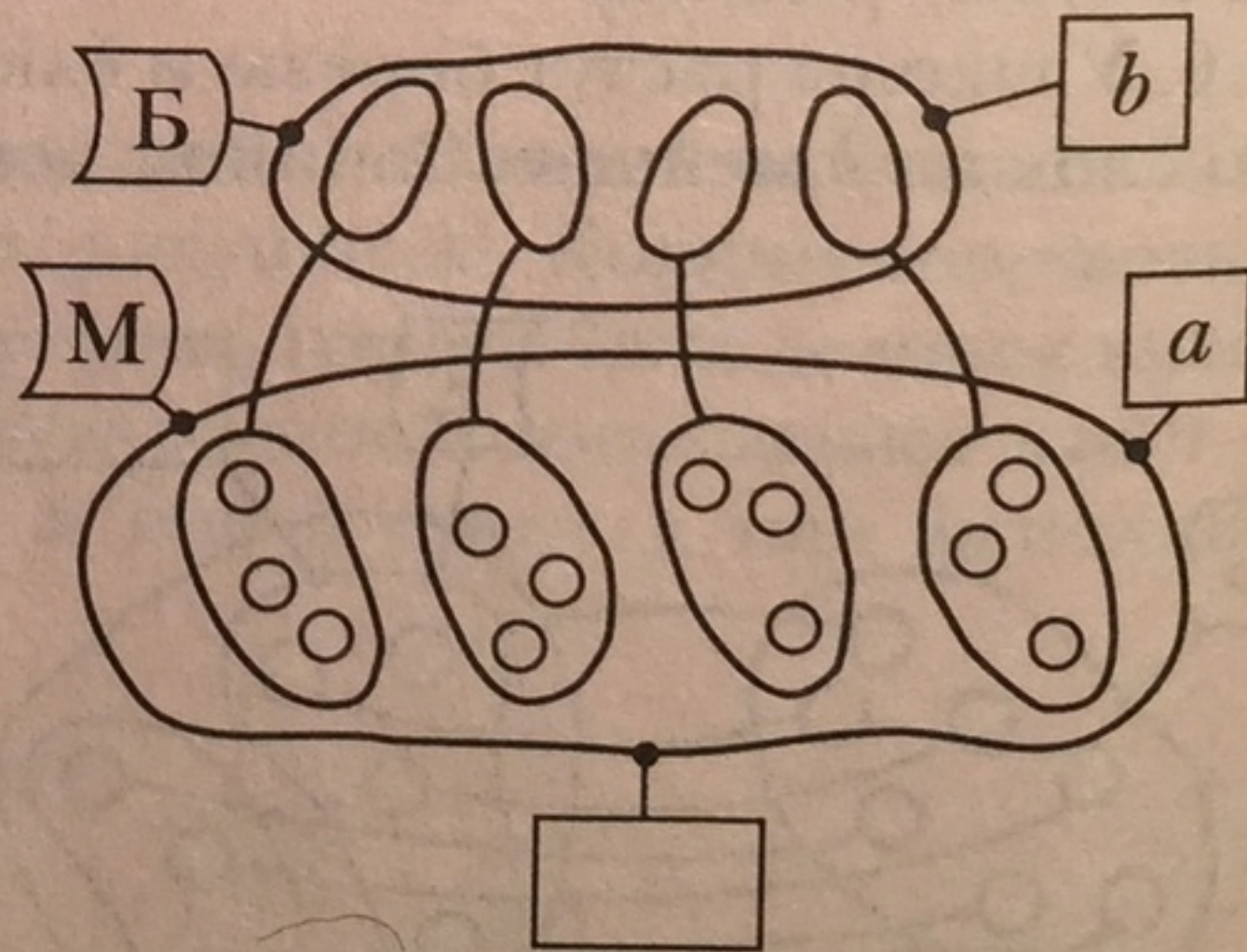


Рис. 55

5.2. В коробке b кусков пластилина. Каждый кусок разрезали на a маленьких кусочков (рис. 55). Запиши количество получившихся кусочков.

5.3. В коробке находятся цветные карандаши (рис. 56). Количество разных цветов равно b . Количество карандашей одного и того же цвета равно a . Запиши, чему равно количество карандашей в коробке.

5.4.
ши к
боль
в b ра
ше, ч

Рис. 56

5.5.
ство м

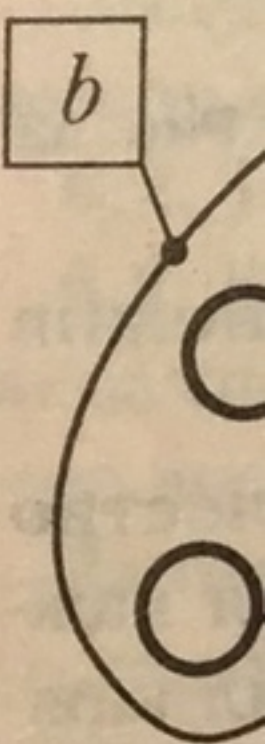


Рис. 58

5.6. b раз м
вьев (
больше
количе
саду.

5.7. a раз, или
ше a в
ние с по
 b и c из

5.4. В книжном шкафу b полок. На каждой полке a книг (рис. 57). Запиши количество книг в шкафу. Можно сказать, что книг в шкафу в b раз больше, чем на одной полке. Или, что то же самое, книг на одной полке в b раз меньше, чем в книжном шкафу. Это значит, что $a \cdot b$ в b раз больше, чем a , или a в b раз меньше, чем $a \cdot b$.

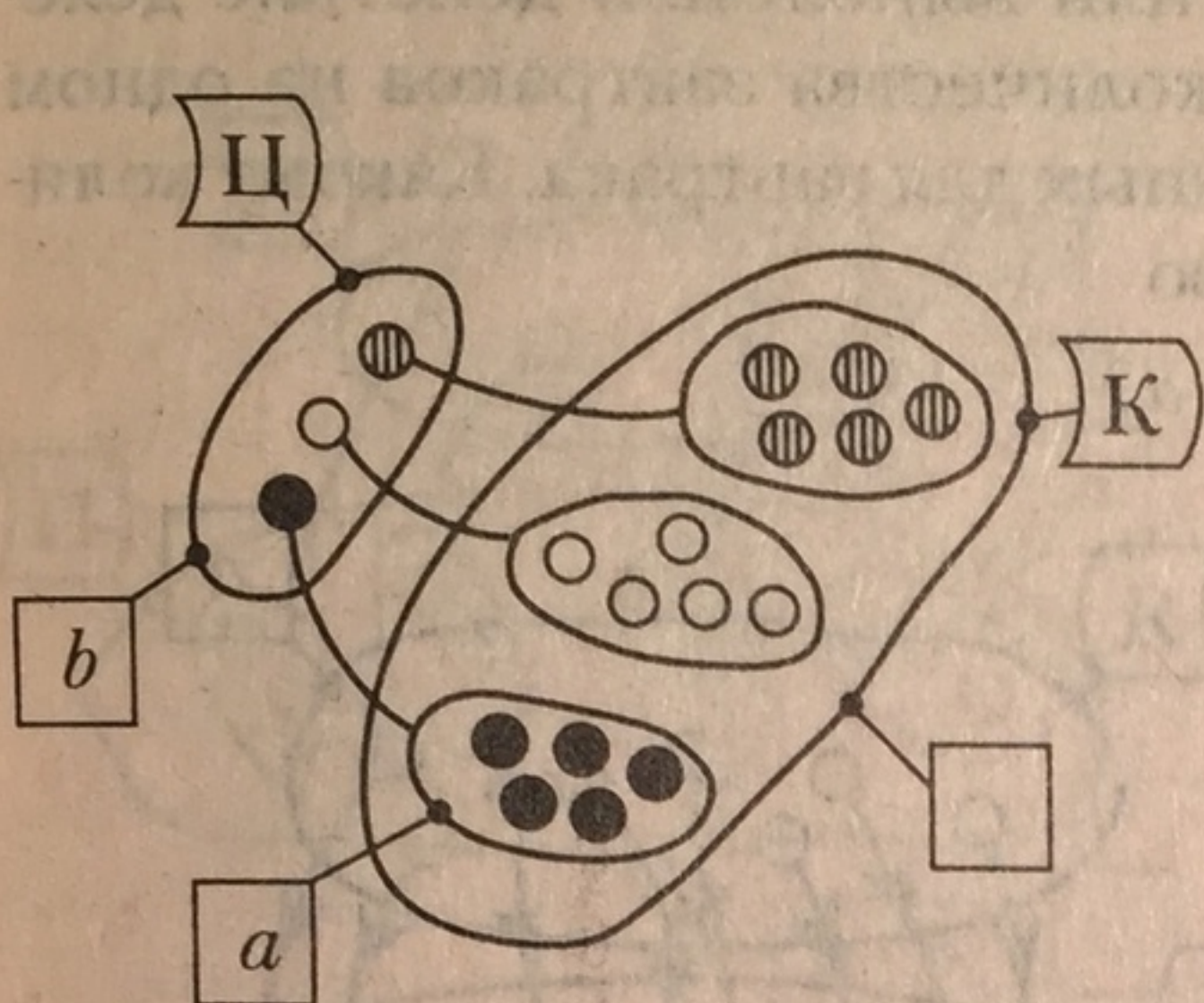


Рис. 56

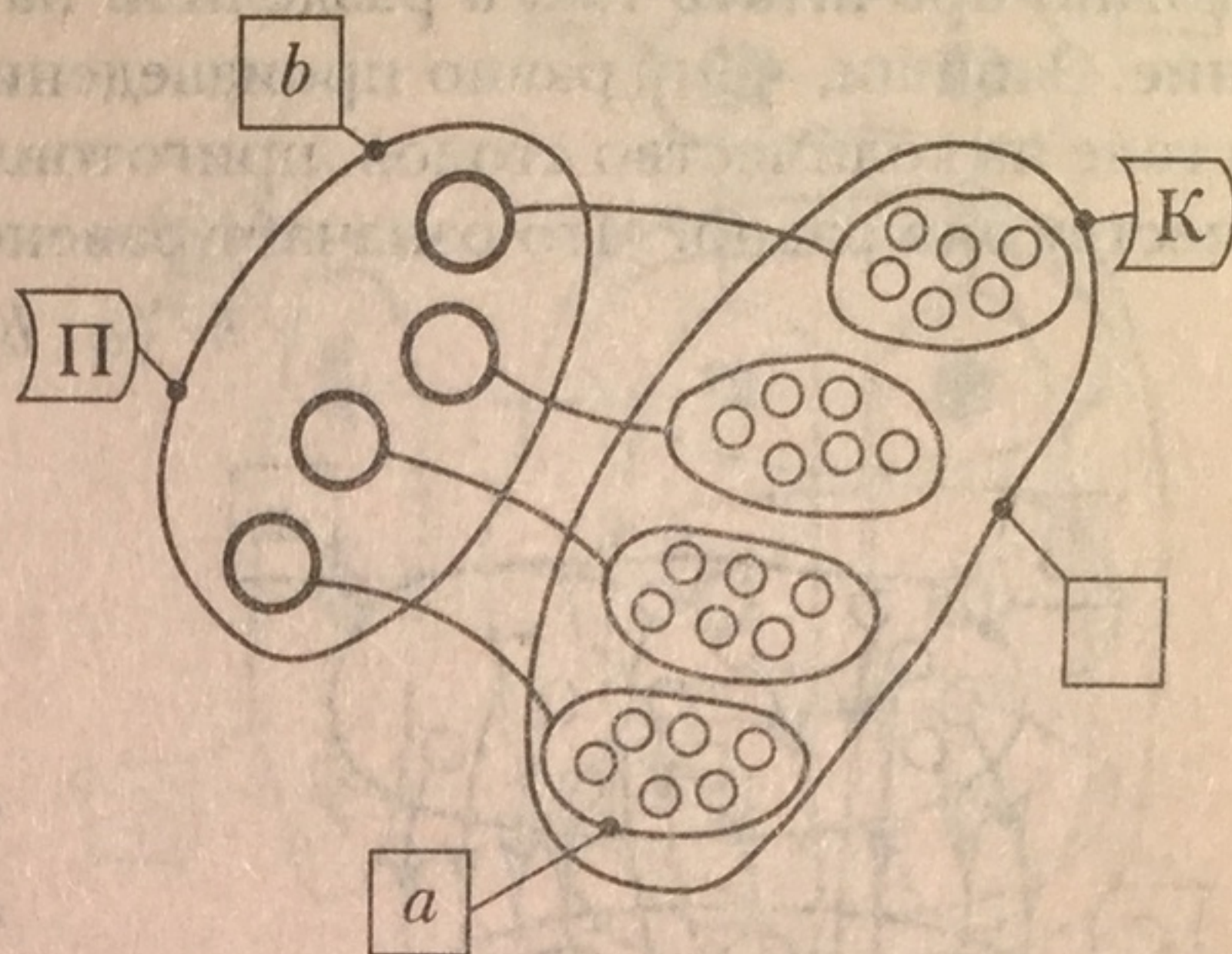


Рис. 57

5.5. У Пети a марок, а у Юры в b раз больше (рис. 58). Запиши количество марок у Юры. Во сколько раз марок у Пети меньше, чем у Юры?

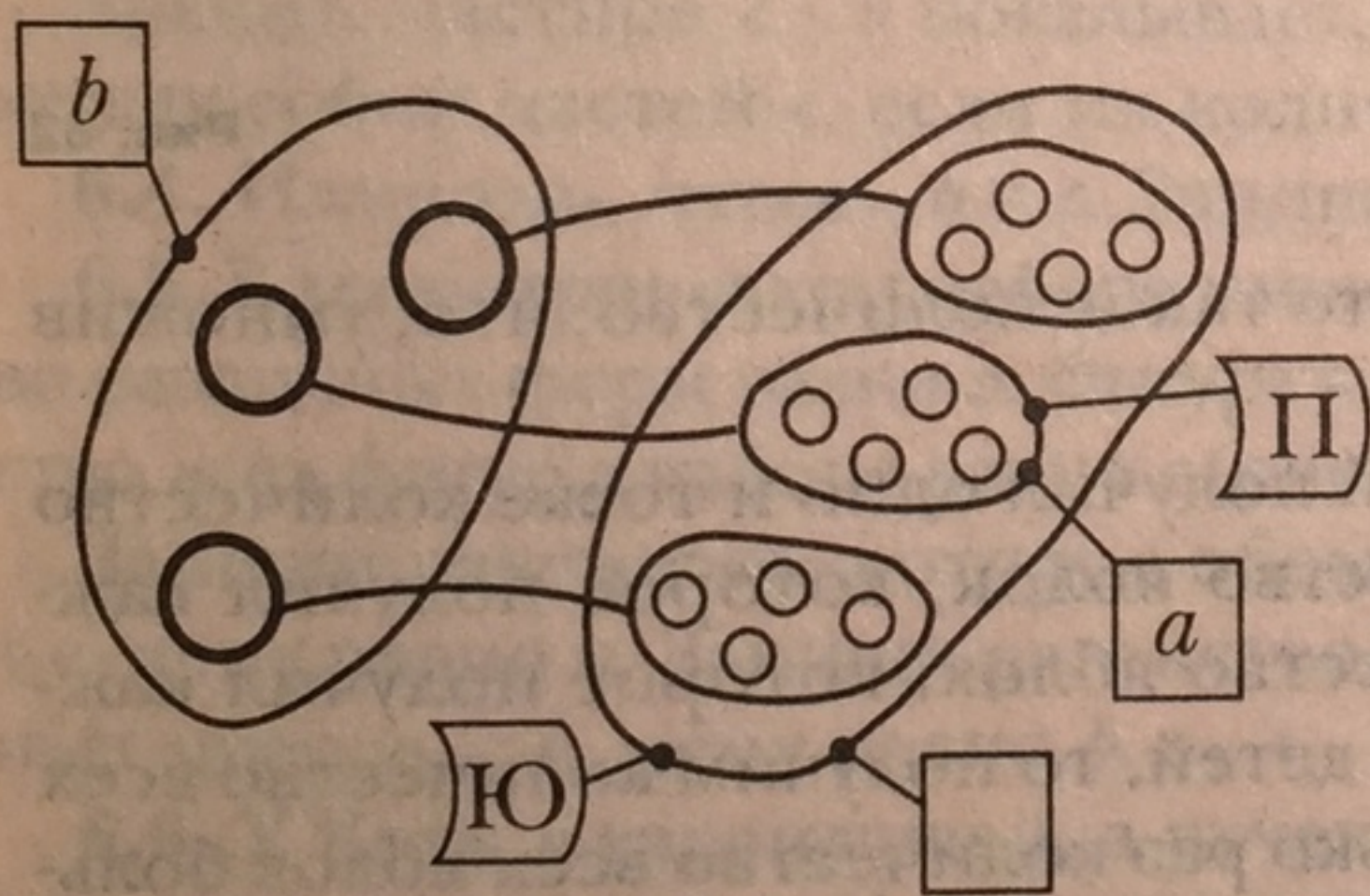


Рис. 58

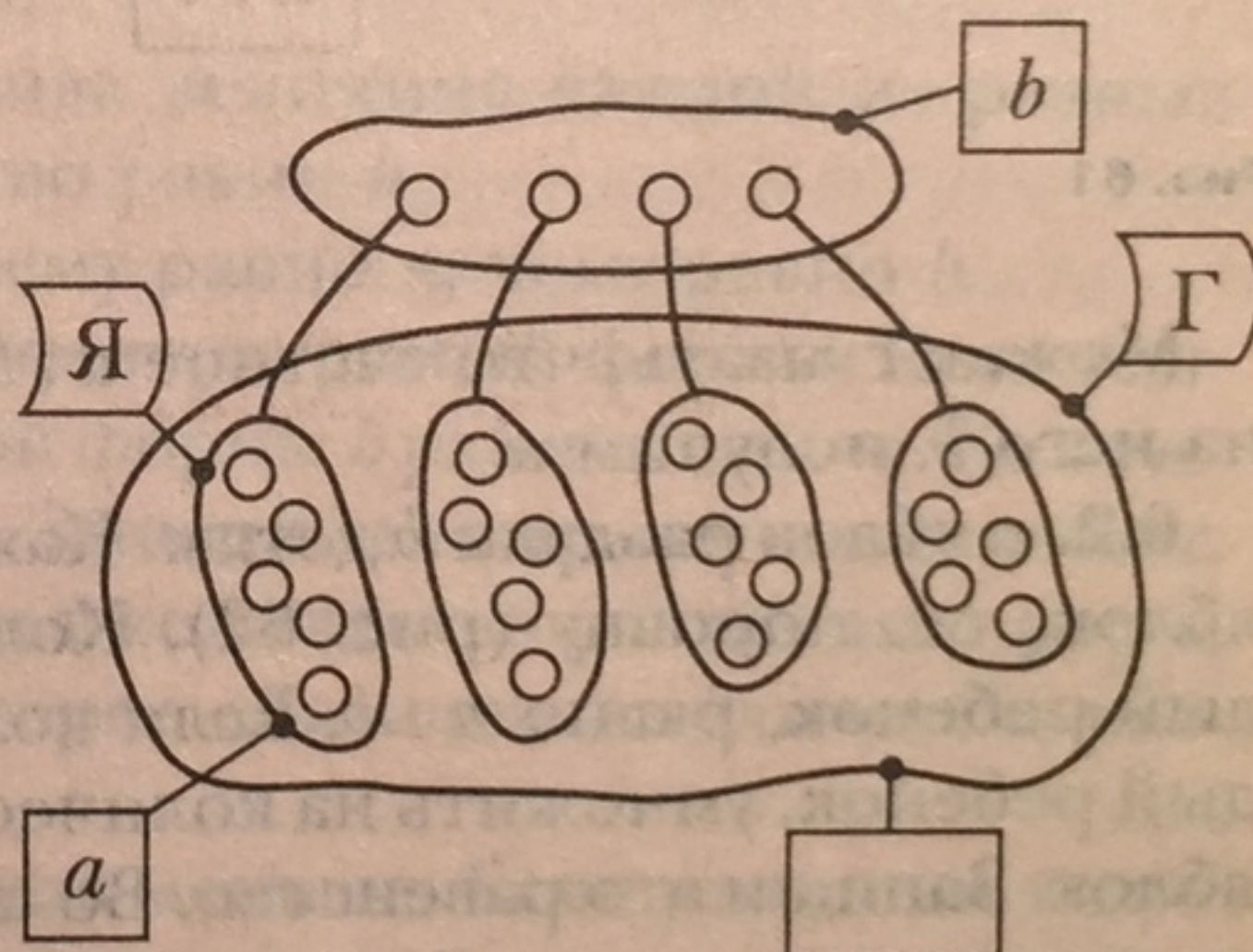


Рис. 59

5.6. В саду растет a яблонь. Их в b раз меньше, чем грушевых деревьев (рис. 59). Каких деревьев больше? Во сколько раз? Запиши количество грушевых деревьев в саду.

5.7. Известно, что a больше b в c раз, или, что то же самое, b меньше a в c раз. Запиши это отношение с помощью равенства, если a , b и c изображены на рисунке 60.

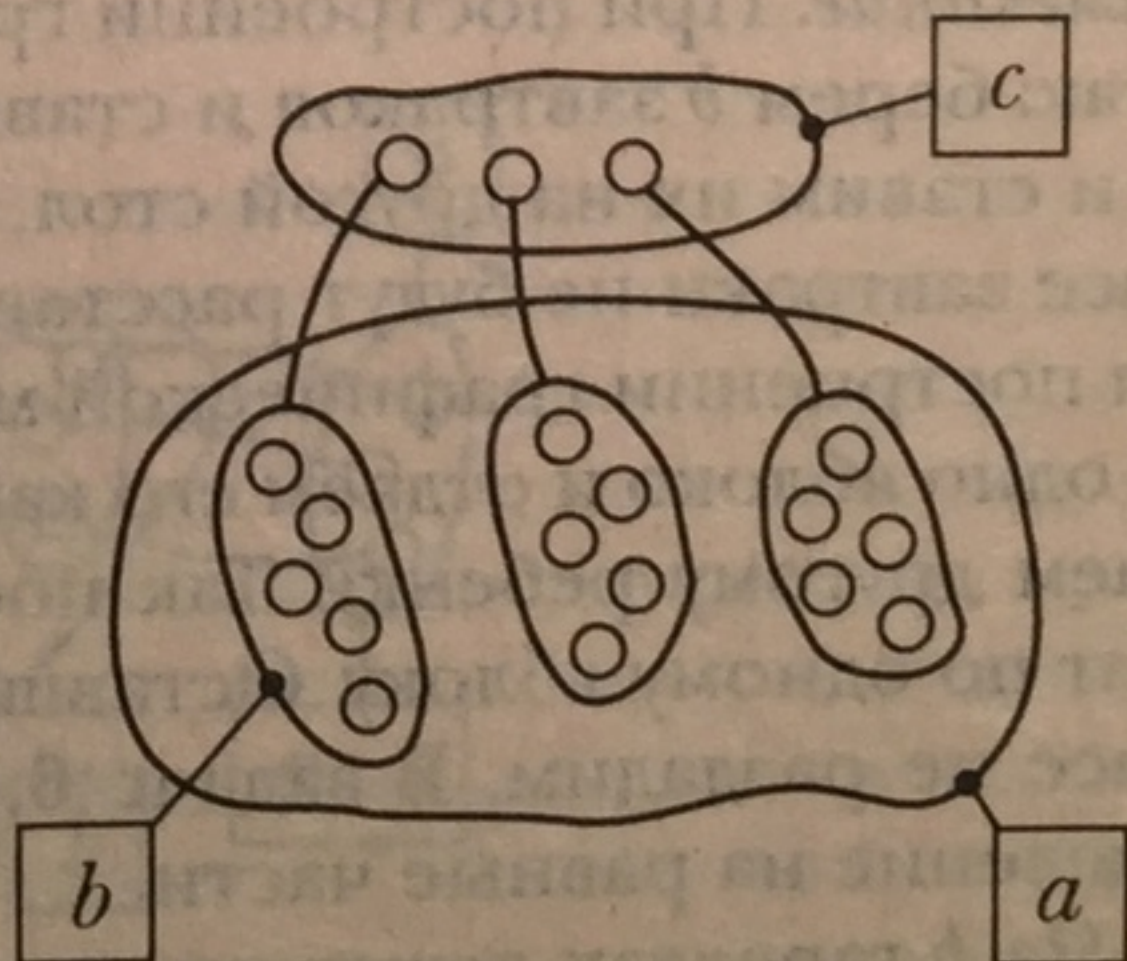


Рис. 60

Пример 6

6.1. Для школьников приготовили a завтраков. На каждый стол поставили по b завтраков (рис. 61). Количество столов, приготовленных для завтрака, есть частное от деления количества всех завтраков на количество завтраков на одном столе. Его записывают как $a : b$. Это выражение можно прочесть так: a разделили на b , или выполнили действие деление. Запиши, чему равно произведение количества завтраков на одном столе на количество столов, приготовленных для завтрака. Какому количеству оно равно? Что означает равенство

$$b \cdot (a : b) = a?$$

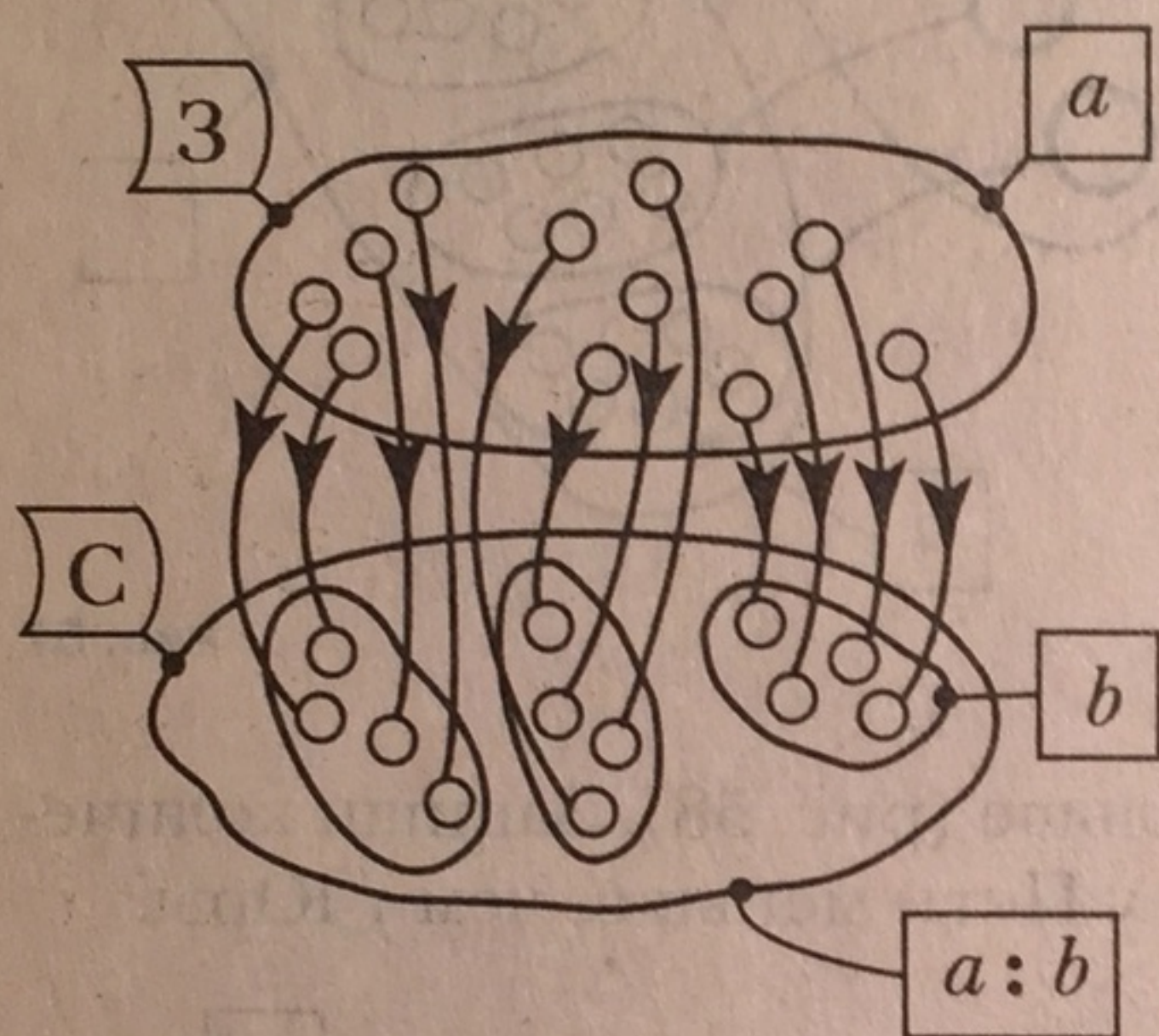


Рис. 61

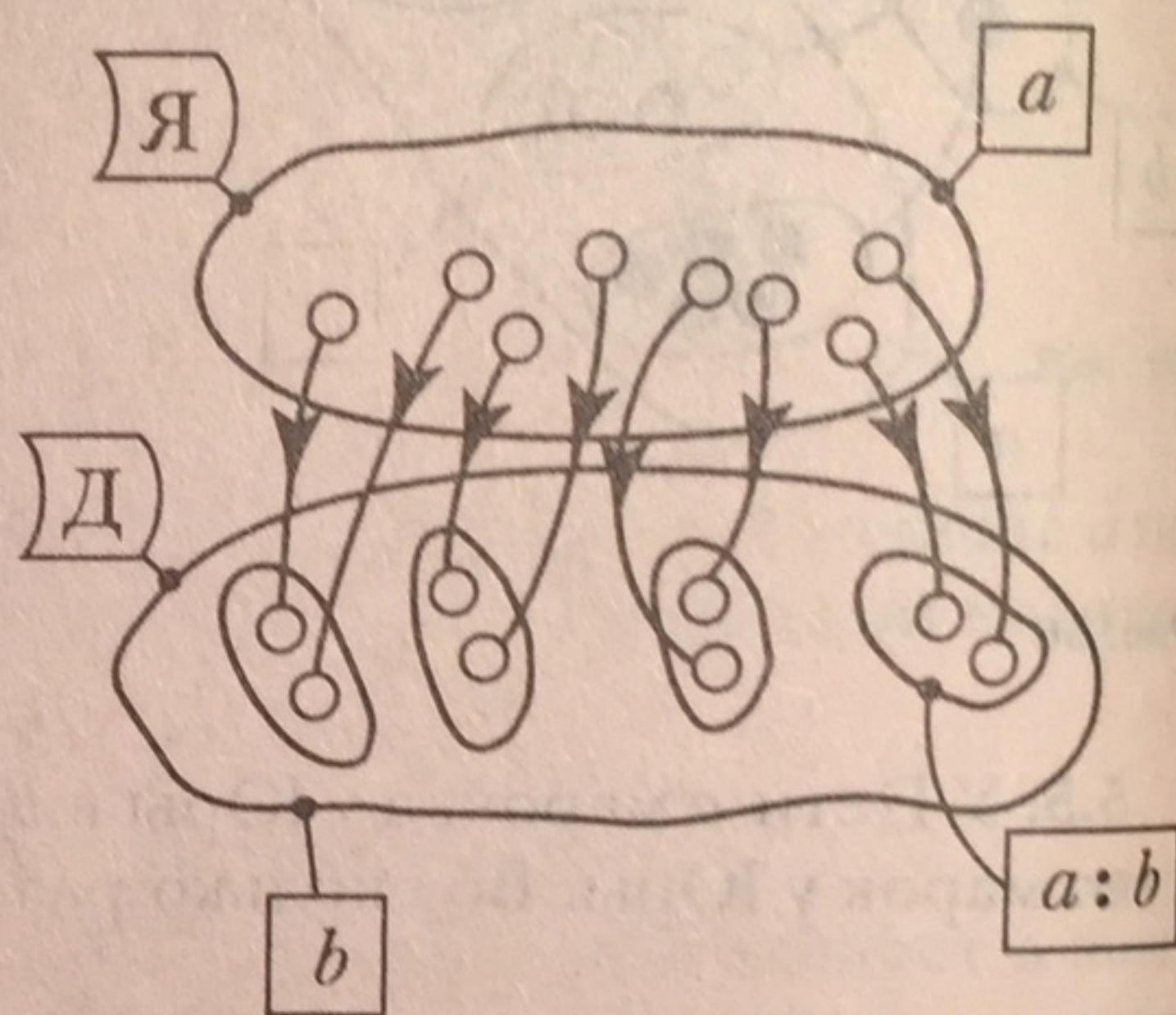


Рис. 62

Можно сказать, что частное $a : b$ — это такое количество, что, умножив на него b , получим a .

6.2. a яблок раздали b детям. Каждый получил одно и то же количество яблок, т.е. поровну (рис. 62). Количество яблок, которое получил каждый ребенок, равно $a : b$. Если количество яблок, которое получил каждый ребенок, умножить на количество детей, то получим количество всех яблок. Запиши это равенство. Во сколько раз количество всех яблок больше, чем количество яблок у каждого ребенка? Во сколько раз количество яблок у каждого ребенка меньше, чем количество всех яблок?

Примечание. При построении графической модели задачи 6.1, рассуждаем так: берем b завтраков и ставим их на стол, затем берем еще b завтраков и ставим их на другой стол, продолжаем этот процесс до тех пор, пока все завтраки не будут расставлены.

При построении графической модели задачи 6.2 рассуждения таковы: берем одно яблоко и отдаем его какому-то ребенку, затем берем еще одно и отдаем другому ребенку. Так поступаем до тех пор, пока все дети не получат по одному яблоку. Оставшиеся яблоки также раздаем по одному, пока все не раздадим. В задаче 6.1 — деление по содержанию, в задаче 6.2 — деление на равные части.

6.3. На b тарелках лежат пирожки. На каждой тарелке a штук. Всего c пирожков (рис. 63). Запиши выражение, равное количеству всех пирож-

ков на тарелках. Запиши равенство. Каким выражением надо записать количество тарелок с пирожками? Запиши полученное равенство.

Таким образом, частное $c : a$ показывает, сколько частей, равных a , содержится в c .

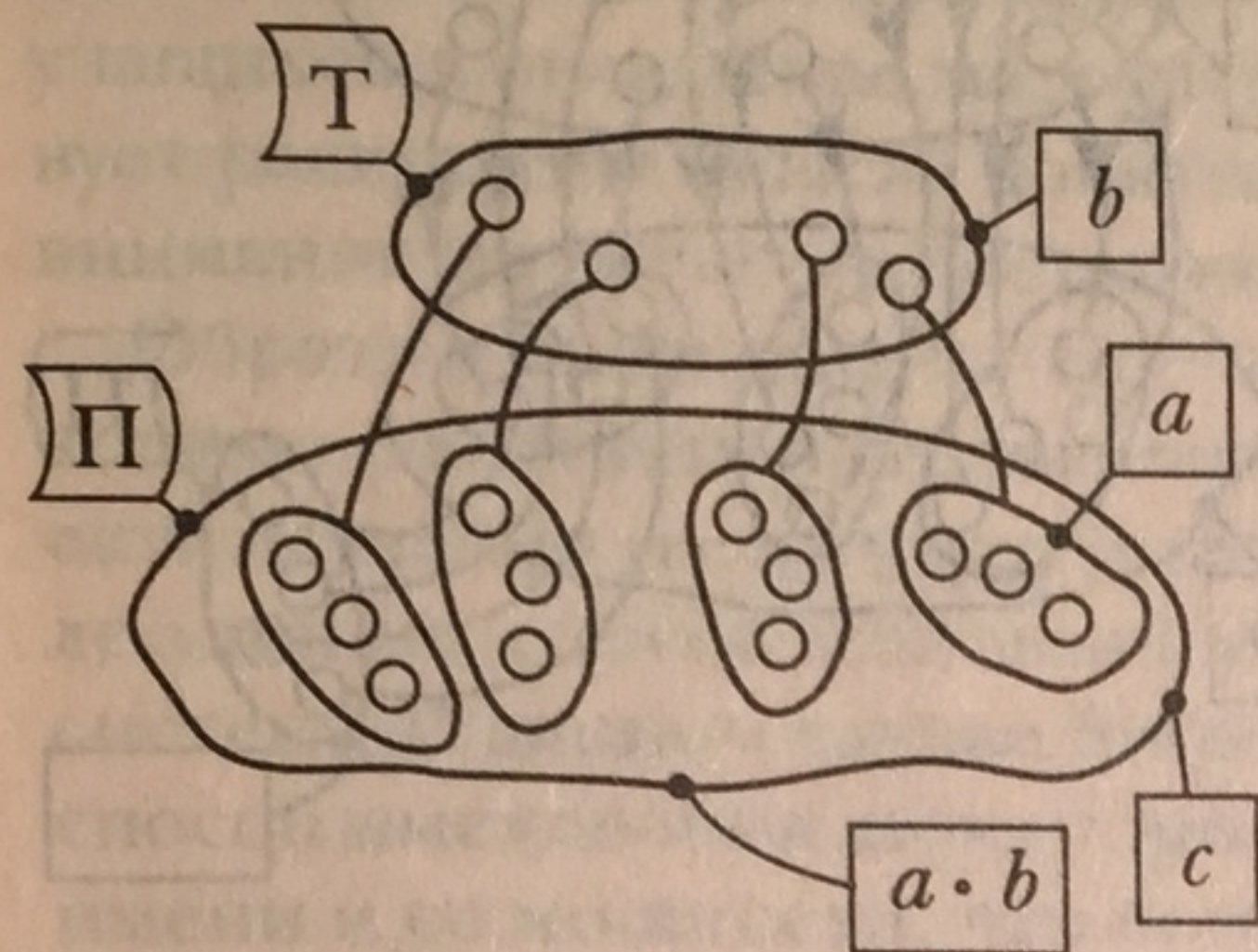


Рис. 63

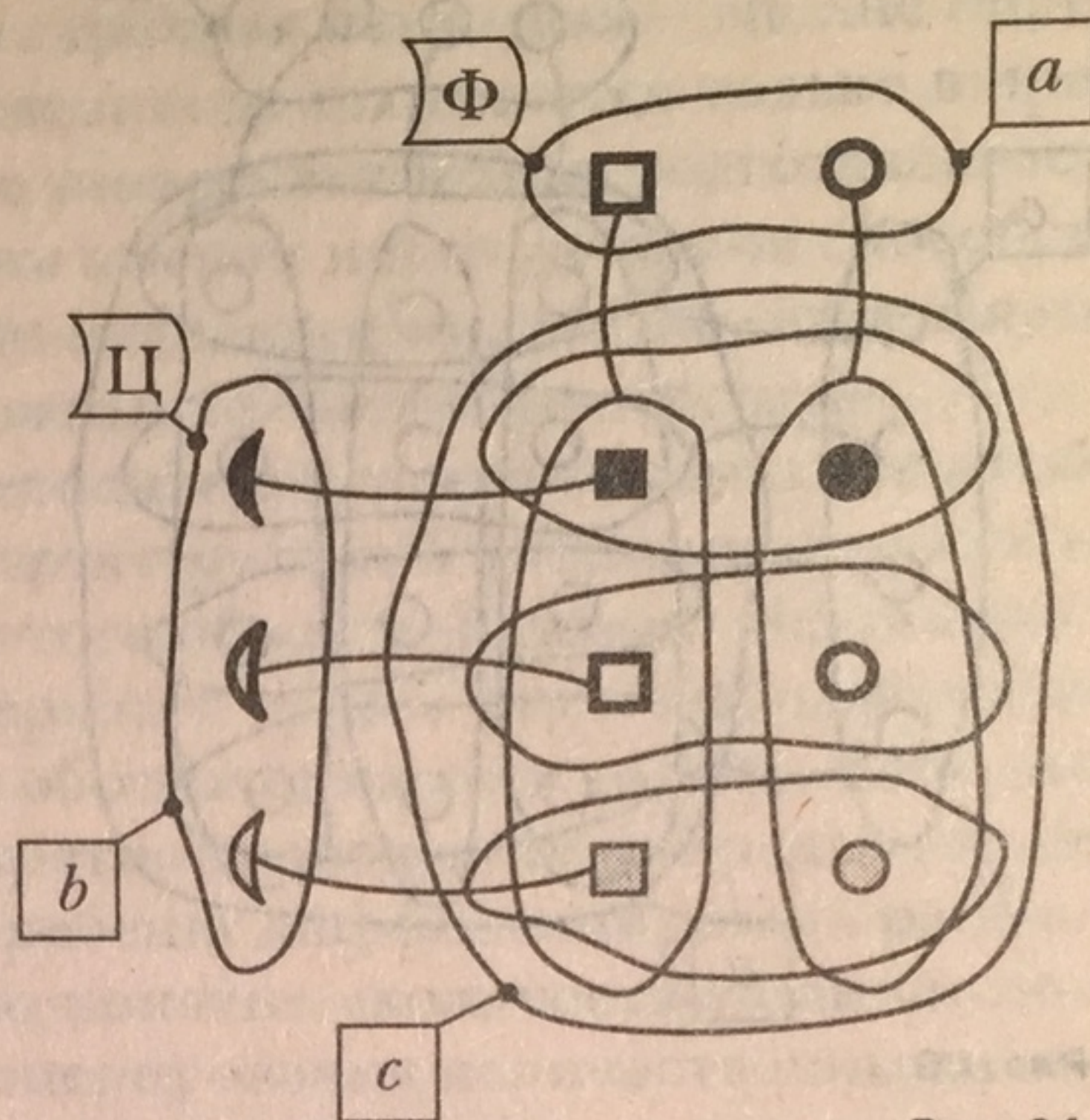


Рис. 64

Каким выражением нужно записать количество пирожков на одной тарелке? Запиши полученное равенство.

Значит, частное $c : b$ показывает, какова величина каждой из равных между собой частей c , если их количество равно b .

6.4. Известно, что $a \cdot b = c$. Запиши, чему равно a ; чему равно b .

6.5. В геометрическом наборе имеются фигуры разной формы. Количество различных форм равно a . Фигура каждой формы b разных цветов. Количество всех фигур в наборе равно c (рис. 64). Запиши два выражения, равные c .

Запиши равенство, которое обозначает количество различных форм, т.е. чему равно a . Запиши равенство, которое обозначает количество разных цветов, т.е. чему равно b .

6.6. У Кати a карандашей, а ручек в b раз меньше. Если разделим количество карандашей на b равных частей, то каждая часть есть количество, равное количеству ручек у Кати (рис. 65).

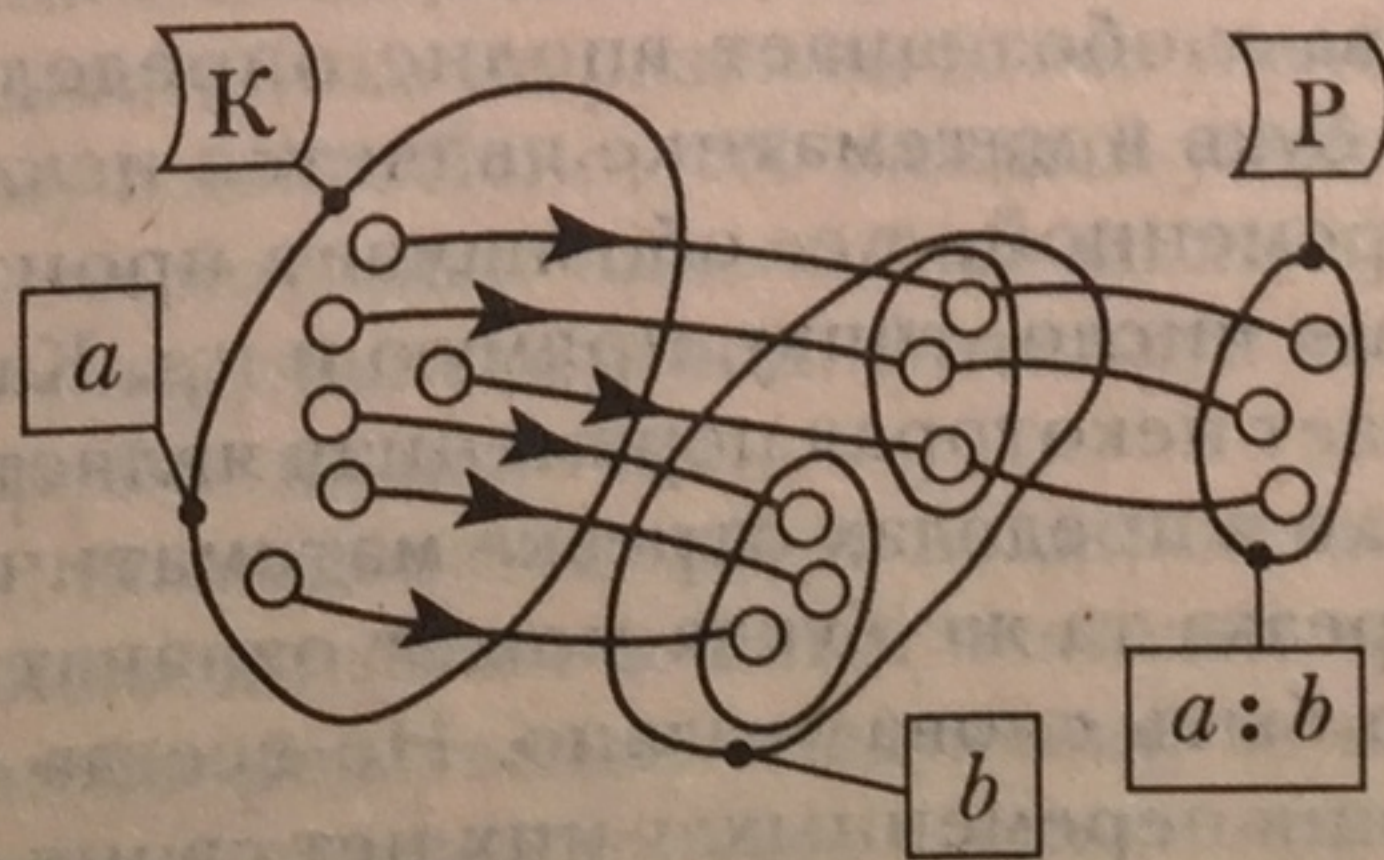


Рис. 65

Во сколько раз количество карандашей больше, чем количество ручек?

6.7. Известно, что a больше b в c раз. Запиши это отношение различными равенствами, если a , b , c изображены на рисунке 66.

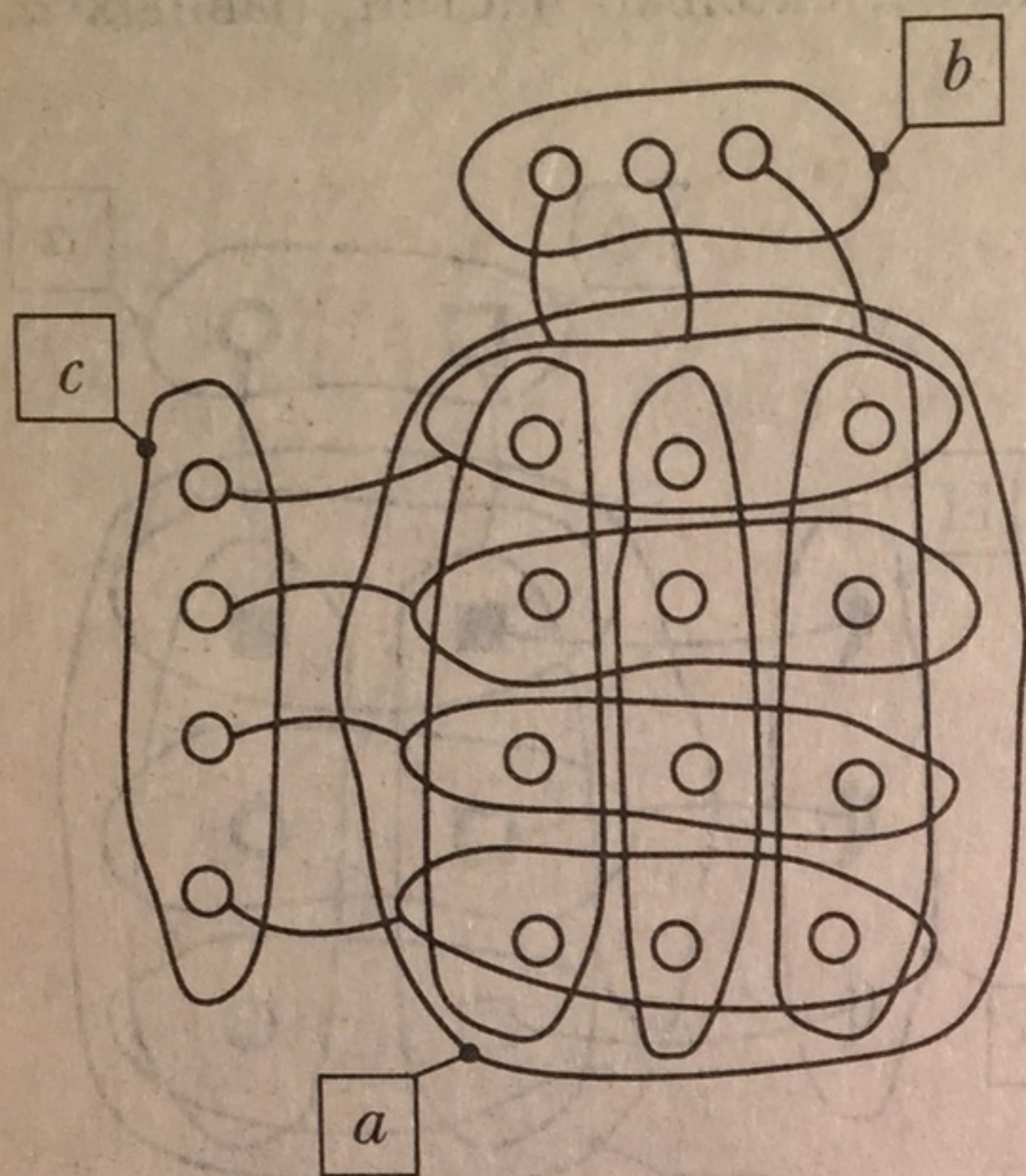


Рис. 66

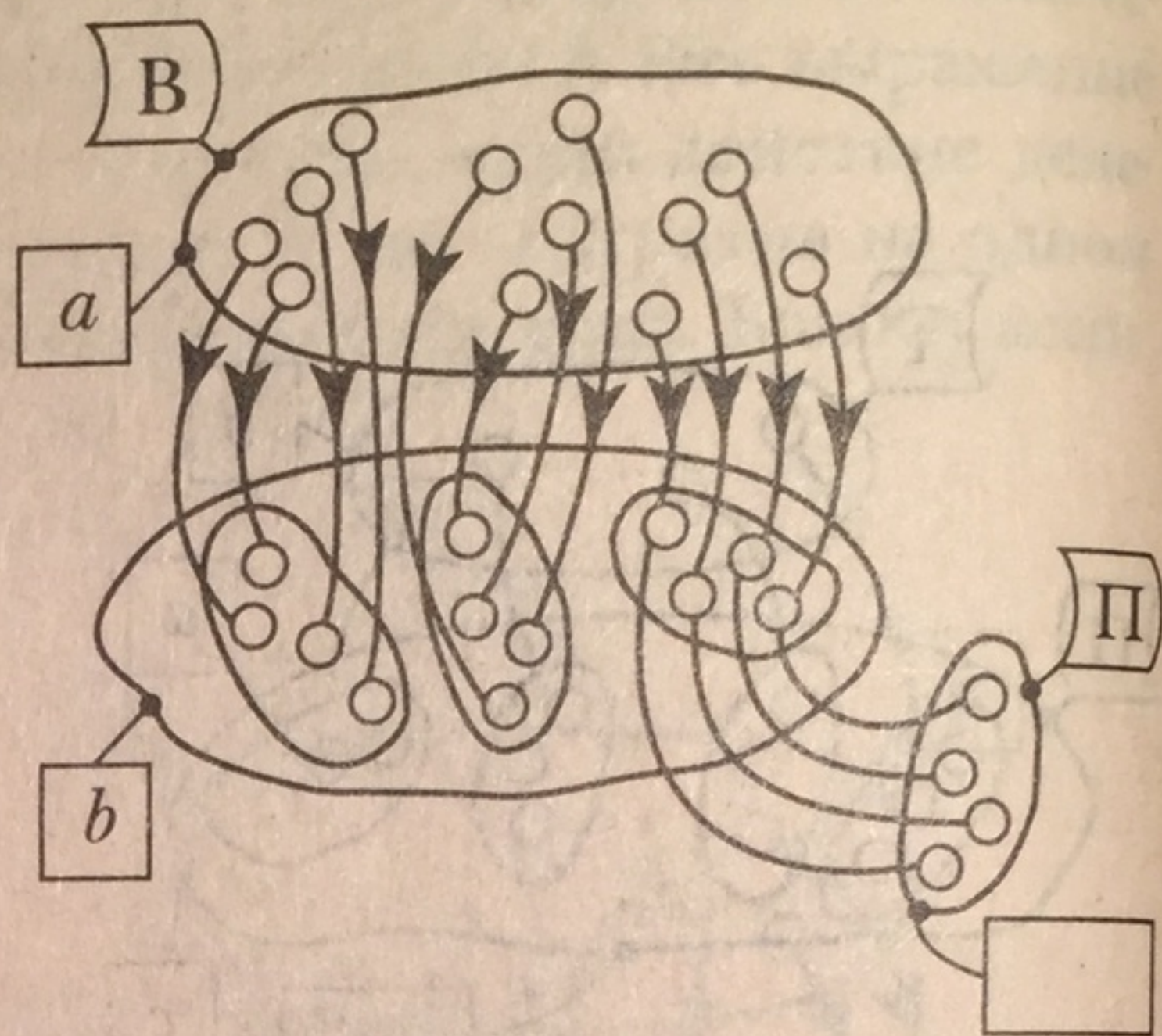


Рис. 67

6.8. Какие еще верные равенства можно записать, если известно, что $a : b = c$. В каких отношениях находятся количества a , b , c ?

6.9. Ваня и Петя играли в «морской бой». Ваня выиграл a раз. Количество выигрышей Вани в b раз больше, чем у Пети (рис. 67). Запиши, чему равно количество выигрышей Пети. Каким равенством можно записать количество выигрышей Вани? Запиши это равенство.

Во всех приведенных примерах рассматриваемые количественные числа «материализуются» с помощью определенного множества, являющегося конкретным представителем класса эквивалентных множеств, определяющего данное число. Это множество обозначается прописной буквой, указывающей его «происхождение». Ее можно рассматривать как имя данного множества. Малые латинские буквы служат обозначением мощности этого множества, т.е. обозначением числа.

Широкое употребление букв является одной из характерных особенностей математического языка. Они используются для именования математических объектов. Иногда буквы служат собственными именами — например, буква π обозначает вполне определенное число. Но такое употребление букв в математике является исключением. Обычно буква служит переменной, т.е. обозначает произвольный объект того или иного типа — число, точку, прямую и пр. Как правило, указание о том, что означает некоторая переменная является «временным»: оно имеет силу только в пределах отрезка математического текста. За пределами этого отрезка та же буква может означать что-то другое — что именно, должно быть снова указано. Но всегда сохраняется особенность употребления переменных: у них нет своих собственных значений, раз и навсегда связанных с ними. Это сближает переменные с местоимениями в русском языке: *он*, *этот* и т.д., которые также не



Рис. 67

известно, что
аз. Количе-
иши, чему
о записать
енные чис-
, являюще-
жеств, оп-
исной бук-
ать как имя
ением мощ-
ых особен-
ования ма-
ими имена-
число. Но
ем. Обыч-
ый объект
ило, указа-
еменным»:
текста. За
о другое —
няется осо-
енных зна-
еменные с
е также не

имеют своих собственных значений и в зависимости от контекста могут обозначать «что угодно».

Легко заметить, что употребление букв в приведенных выше примерах не является обозначением переменной. В каждом из них прописная буква есть имя определенного множества, а строчная латинская — вполне определенного количества. Но эта определенность сохраняется только в пределах одной конкретной задачи. Такое употребление букв подготавливает учащихся к овладению математическим языком и в то же время способствует раскрытию смысла понятия «количественное число», не отвлекая их внимание на решение достаточно сложных вычислительных задач.

Обратим внимание на то, что в методике обучения математике необходимо различать онтологическую структуру самой математики как объекта изучения и структуру описания этого объекта. В самом общем смысле именно способ описания характеризует ту или иную методическую систему. В данном случае буквенные обозначения есть только еще один способ именованья двух сторон конкретной совокупности предметов: ее имени и ее мощности, что помогает ребенку дифференцировать рассматриваемую ситуацию. При этом само понятие «количественное число» постепенно выявляется в процессе оперирования количественными отношениями и выделения функции этого понятия в рассматриваемом целостном образе. Это значит, что теоретическое понятие получает генетическое объяснение, постепенно наполняясь все более точным содержанием, допускает его развитие и становление независимо от тех конкретных ситуаций, в которых оно было выделено, а в дальнейшем — возможность разных интерпретаций. Таким образом, употребление буквенных обозначений является первым шагом на пути выделения отвлеченного числа.

§ 3. Раскрытие смысла понятия «порядковое число»

Представления о последовательности как способе фиксации и хранения числовой информации возникли уже в глубокой древности. С этой целью использовались узелки, зарубки, части тела и т.п. Например, Геродот, описывая поход Дария на скифов (VI в. до н.э.), приводит указание, данное ионийцам, которое сводилось к следующему: ждите меня столько дней, пока не развяжете все узелки на этом ремне, развязывая по одному в день. Ясно, что каждый узелок завязывался в соответствии с днем, на который намечались вполне определенные действия. Аналогично поступал скотовод, фиксируя каждое животное в стаде с помощью зарубки на палочке.

Таким образом, последовательность возникает в процессе ее построения: сначала производится начальный элемент, затем — за каждым уже построенным — непосредственно следующий за ним. И такое построение может быть продолжено столько, сколько это потребует. Следовательно, такого рода построение может применяться для хранения и фиксации любой числовой информации, которая может быть выражена

натуральным числом. Несмотря на то, что элементы подобной последовательности между собой неразличимы, информация, которую несет каждый из них, существенно различна. Она определяется местом, занимаемым данным элементом в последовательности. При таком способе указанное место требует хранения и воспроизведения всего отрезка, предшествующего данному. Неудобства очевидны. Поэтому выходом из положения является построение такой последовательности, каждый элемент которой отличен от всех остальных и, значит, характеризует место, которое занимает. В то же время эффективное ее использование требует запоминания соответствующих элементов в точно фиксированном порядке. С другой стороны, это требует изобретения все новых символов. Легко видеть, что построение такой последовательности, в которой каждый элемент характеризует занимаемое им место, возможно только в том случае, если установлено правило получения каждого следующего элемента. Эта задача оказалась чрезвычайно трудной и была удовлетворительно решена только с изобретением позиционных систем счисления.

Теоретическое обоснование такого подхода к понятию натурального числа было предложено лишь в середине XIX в. Наиболее заверченный вид оно получило в трудах Дж. Пеано, который отчетливо выделил систему основных понятий, не определяемых через другие, и те требования, которым эти понятия должны удовлетворять. Все же остальные понятия и свойства системы натуральных чисел определяются через основные и доказываются как следствия явно высказанных требований — аксиом.

Итак, согласно Дж. Пеано, система натуральных чисел — это непустое множество, элементы которого связаны отношением «непосредственно следовать за», удовлетворяющее следующим условиям — аксиомам:

1. 0 есть натуральное число, оно не следует непосредственно ни за каким натуральным числом.

2. Непосредственно следующее за натуральным числом есть число натуральное.

3. Если натуральное число a непосредственно следует за натуральным числом b и за натуральным числом c , то b и c совпадают.

4. Если за натуральным числом a непосредственно следуют натуральное число b и натуральное число c , то b и c совпадают.

5. Если какое-либо утверждение справедливо для 0 и если из предположения его справедливости для некоторого числа a следует справедливость этого утверждения для непосредственно следующего числа, то это утверждение справедливо для всех натуральных чисел.

Если обозначить непосредственно следующее за a число a' , то последовательность натуральных чисел, согласно указанным аксиомам, может быть построена так:

$$0 \ 0' \ (0')' \ ((0')')' \ \dots$$

Аксиома 5 утверждает, что никаких других элементов в натуральном ряде нет.

В то же время, эта аксиома дает способ доказательства утверждений о натуральных числах, называемый методом полной индукции. Действи-

тельно, если какое-то утверждение справедливо для первого натурального числа и из справедливости его для некоторого числа вытекает справедливость данного утверждения для непосредственно следующего за ним, то это значит его справедливость для любого натурального числа. Поэтому данную аксиому принято называть аксиомой индукции.

Г.Грассман показал, как для таких чисел могут быть определены операции сложения и умножения. Определение сложения таково:

- 1) $a + 0 = a$;
- 2) $a + b' = (a + b)'$.

Для того, чтобы показать, как такое определение может применяться на практике, обозначим несколько первых элементов натурального ряда какими-нибудь символами. Например, так:

$$0' = \perp, \perp' = \top, \top' = \text{д}, \text{д}' = \forall, \forall' = \wedge, \wedge' = \sqcup, \dots$$

Получили последовательность:

$$0 \top \top \text{д} \forall \wedge \sqcup \dots$$

Тогда, согласно определению, сумму $\top + \text{д}$ можно найти так:

$$\begin{aligned} \top + \text{д} &= (\top + \top)' = ((\top + \top))' = ((\top + 0'))' = \\ &= (((\top + 0))')' = (((\top))')' = ((\text{д}))' = (\forall)' = \wedge, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\top + \text{д} = \wedge.$$

Таким образом, второе слагаемое записываем через предшествующий ему элемент ряда до тех пор, пока не придем к слагаемому, равному нулю, так как только в этом случае сумма известна, затем следующие элементы ряда берем столько раз, сколько понадобится, чтобы дойти до места, определяемого вторым слагаемым, начиная это движение от места, занимаемого первым слагаемым.

Следовательно, мы находим суммы первого слагаемого со всеми элементами ряда, предшествующими второму слагаемому. Поэтому данное определение называют также рекурсивным. От recursio (бегу назад).

Наглядно этот процесс можно представить так:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \top & \top & \text{д} & \forall & \wedge & \sqcup \dots \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & 0 & \top & \text{д} \end{array}$$

Методом математической индукции легко доказать ассоциативность и коммутативность сложения, а также показать, что всякое натуральное число, отличное от 0, представляется в виде $a + 1$, где 1 есть число, непосредственно следующее за нулем, т.е. $1 = 0'$. Отсюда следует, что натуральные числа могут быть представлены в виде такой последовательности:

$$0 \quad 1 \quad 1+1 \quad 1+1+1 \quad 1+1+1+1 \dots$$

С помощью сложения на множестве натуральных чисел может быть определено отношение порядка:

$a > b$ тогда и только тогда, когда найдется такое натуральное $c \neq 0$, что $a = b + c$.

Ранее было показано, что сумма $b + c$ при $c \neq 0$ может быть найдена перемещением по натуральному ряду от b на c элементов. Поэтому $a > b$ также означает, что a находится в натуральном ряду «дальше», чем b . Это определение также означает, что сумма больше любого из слагаемых, если хотя бы одно из них отлично от нуля.

Содержательный смысл отношения « $>$ » показывает, что это отношение является линейным порядком и он совпадает с естественным порядком расположения чисел в натуральном ряду.

Нетрудно также показать, что для сложения выполняется свойство сократимости, т.е. из $a + c = b + c$ следует, что $a = b$. И выполняется свойство монотонности сложения относительно порядка, т.е. из $a > b$ следует $a + c > b + c$.

Умножение определяется также рекурсивно следующими равенствами:

$$1) a \cdot 0 = 0;$$

$$2) a \cdot b' = (a \cdot b) + a.$$

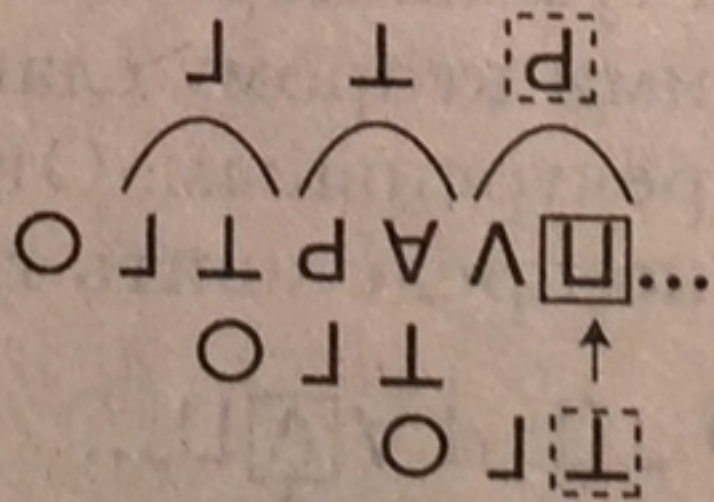
Таким образом, определение умножения задает правило нахождения произведения любых натуральных чисел, если известно, как находить суммы таких чисел.

Отметим, что из определения умножения, так же как и из определения сложения, не следует, что для любых двух натуральных чисел существует и единственна каждая из этих операций, но это может быть доказано в рамках принятой системы аксиом.

Используя введенные выше обозначения для первых элементов натурального ряда и определение умножения, найдем произведение $1 \cdot d$.

$$\begin{aligned} 1 \cdot d &= 1 \cdot 1' = (1 \cdot 1) + 1 = (1 \cdot 1') + 1 = ((1 \cdot 1) + 1) + 1 = \\ &= ((1 \cdot 0') + 1) + 1 = (((1 \cdot 0) + 1) + 1) + 1 = ((0 + 1) + 1) + 1 = \\ &= (1 + 1) + 1 = 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

Если воспользоваться содержательным смыслом сложения, то соответствующий произведению $1 \cdot d$ элемент ряда может быть найден так:



Отсюда

$$1 \cdot d = d.$$

Методом математической индукции нетрудно доказать, что умножение ассоциативно и коммутативно, связано со сложением дистрибутивным законом, что для умножения выполняются также законы сократимости и монотонности относительного порядка, что имеют место следующие свойства умножения:

$$a \cdot 0 = 0, 0 \cdot a = 0; a \cdot 1 = a, 1 \cdot a = a$$

для всякого натурального a .

Покажем, что каждый элемент последовательности натуральных чисел может служить обозначением конкретного количественного числа, т.е. служить средством фиксации, хранения и передачи числовой информации.

Пусть дана некоторая совокупность A , обозначим ее мощность буквой a . Возьмем последовательность

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ...

Устанавливая взаимно однозначное соответствие так, как показано на рисунке 68, получаем, что перебор предметной совокупности заканчивается на месте последовательности, обозначенном символом Ψ . В этом процессе элементы A упорядочились вполне определенным образом, подобно тому, как упорядочен отрезок нашей последовательности. Для того, чтобы убедиться в том, что данный символ Ψ может быть также и характеристикой численности A , надо показать, что он не зависит от порядка, в котором располагаются элементы A в процессе установления взаимно однозначного соответствия. В действительности верно, что любые конечные множества одной и той же мощности линейно упорядочиваются подобно одному и тому же отрезку натурального ряда и поэтому наибольшее число этого отрезка является и характеристикой численности каждого из них. Поэтому можно заключить, что $a = \Psi$.

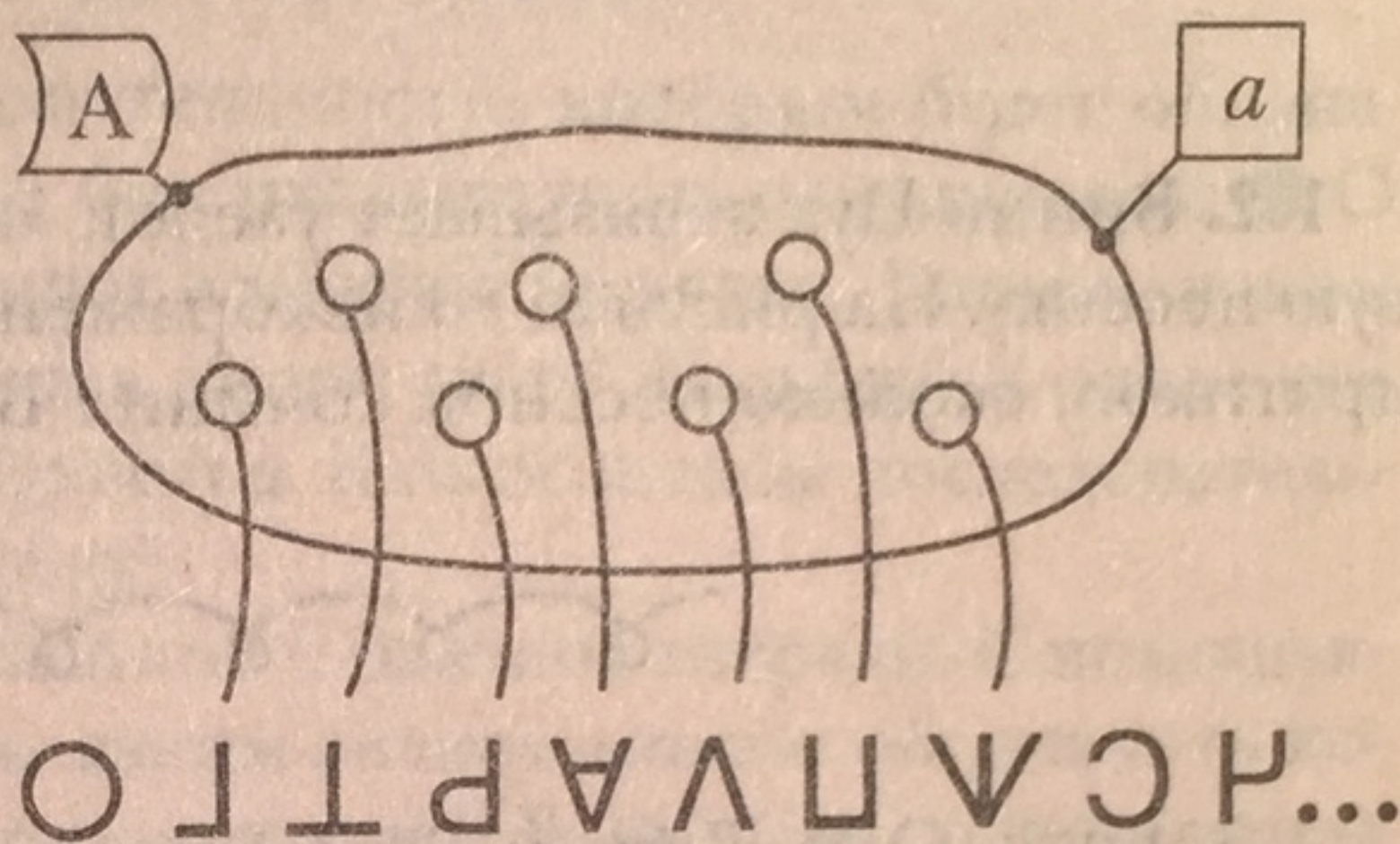


Рис. 68

Каждый отрезок натурального ряда, т.е. множество всех чисел, меньших данного натурального числа, следовательно, и всякое подобно ему упорядоченное множество определяет порядковое число.

Иными словами, в процессе пересчета некоторой совокупности способом установления взаимно однозначного соответствия между элементами совокупности и некоторым отрезком натурального ряда мы получаем порядковое число, которое отвечает на вопрос «который по счету?», ем порядковое число, которое отвечает на вопрос «сколько?». То есть, но не число количественное, отвечающее на вопрос «сколько?». То есть, приписывая каждому элементу последовательности номер, для ответа на вопрос «сколько?» следует убедиться в том, что последний приписываемый номер один и тот же и не зависит от того, какие именно номера получили элементы пересчитываемой совокупности.

Заметим, что начало последовательности 0 является особым ее элементом, он единственный, который не может быть представлен в виде $a + 1$, и поэтому при счете мы начинаем приписывание номеров элементам совокупности, начиная с непосредственно следующего за нулем. По этой причине часто считают, что 0 не есть натуральное число, а совокупность всех натуральных чисел, включая нуль, называют множеством целых неотрицательных чисел.

Пример 1

1.1. Для кролика заготовили морковь. Он каждый день съедает по одной. На сколько дней хватит моркови кролику? Отметь на рисунке 69 красным цветом эти дни.

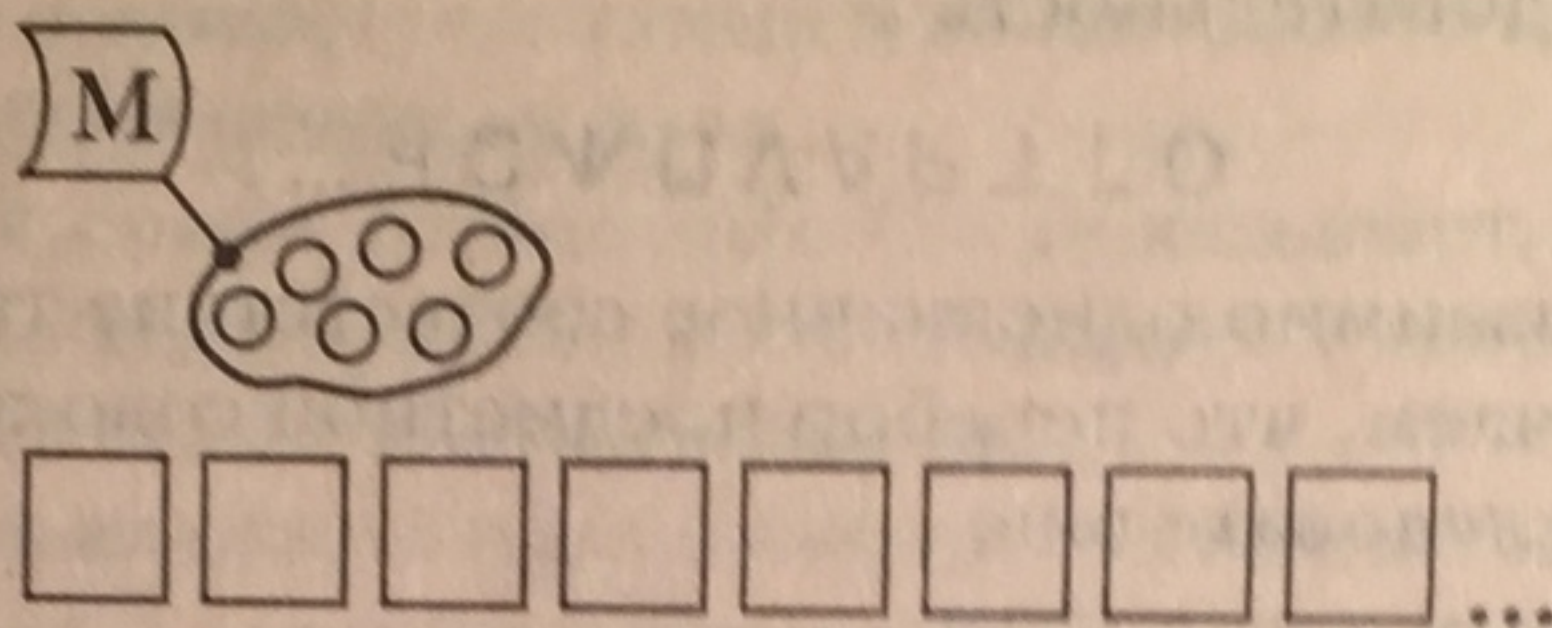


Рис. 69

1.2. Винни-Пух завязывает узелок «на память», как только сочинит новую песенку. На рисунке 70 изображены эти узелки. Нарисуй столько квадратиков, сколько песенок сочинил Винни-Пух.

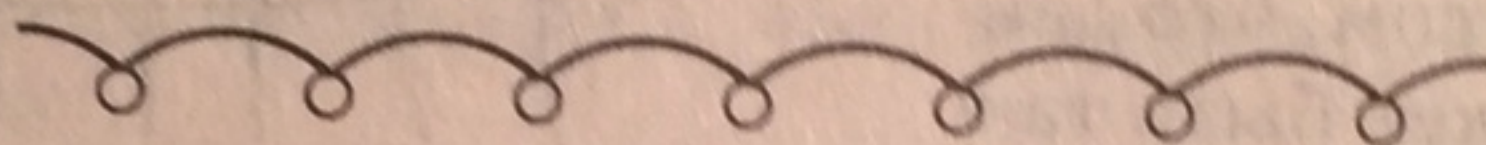


Рис. 70

1.3. Катя, Оля, Лена и Таня встали так в ряд, как показано на рисунке 71. Кто стоит между Катей и Таней? Кто стоит за Катей? Сразу перед Таней? Лена хочет, чтобы ее соседями были Оля и Катя. Нарисуй, как тогда встанут в ряд девочки.

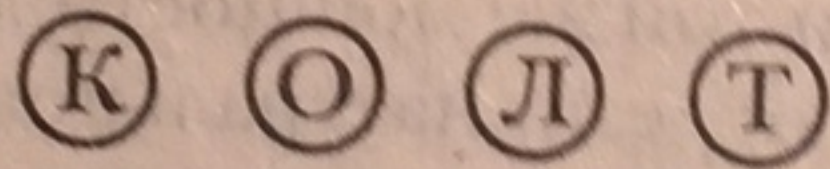
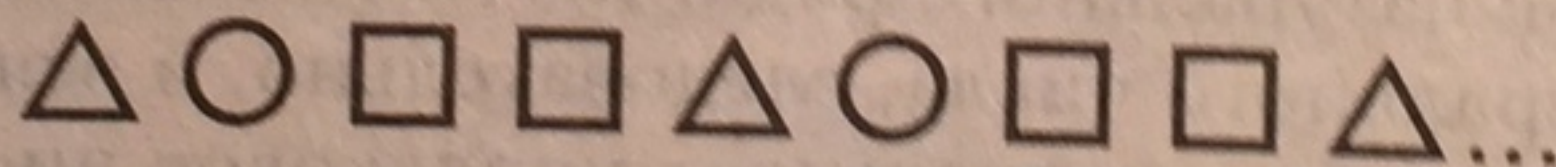


Рис. 71

1.4. Катя нарисовала последовательность так:



а Маша так:

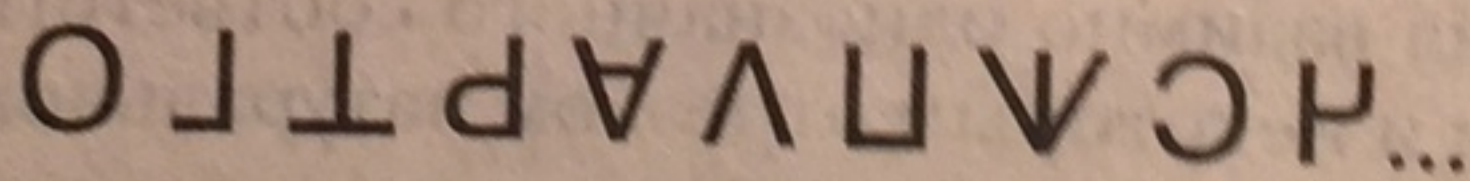


Рис. 72

Найди в Катиной последовательности знак, который стоит на том же месте, на каком стоит знак Ψ в Машинной последовательности (рис. 72).

Продолжи последовательность Кати.

Можешь ли ты продолжить последовательность Маши?

Как это можно сделать?

1.5. На рисунке 73 нарисованы марки. Петя и Ваня нарисовали последовательности. Петя такую: $\bigcirc \triangle \nabla \square \oplus \star \dots$, а Ваня такую: $\blacksquare \square \triangle \ominus \triangleright \bigcirc \dots$ и записали, что $a = \oplus$, $a = \triangleright$. Покажи, что Петя и Ваня не ошиблись, если ...

1.6. Катя нарисовала последовательность $\perp \perp \triangleleft \nabla \wedge \sqcup \Psi \circ \Psi \dots$

Какой знак стоит в этой последовательности за Ψ , сразу перед ним?

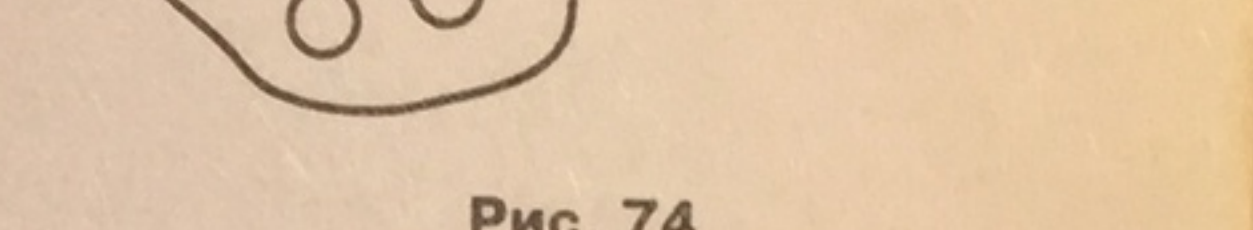
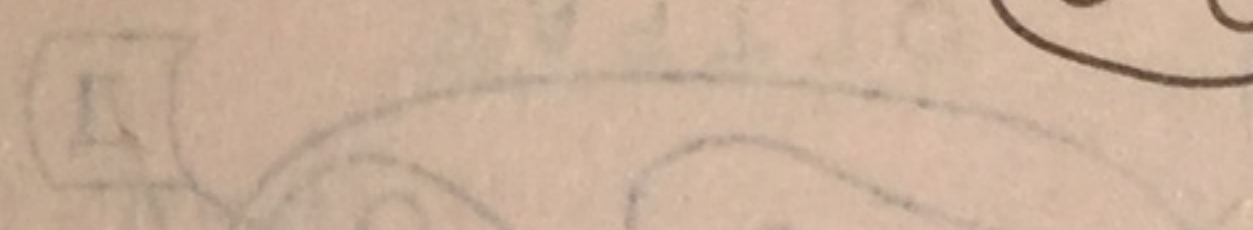
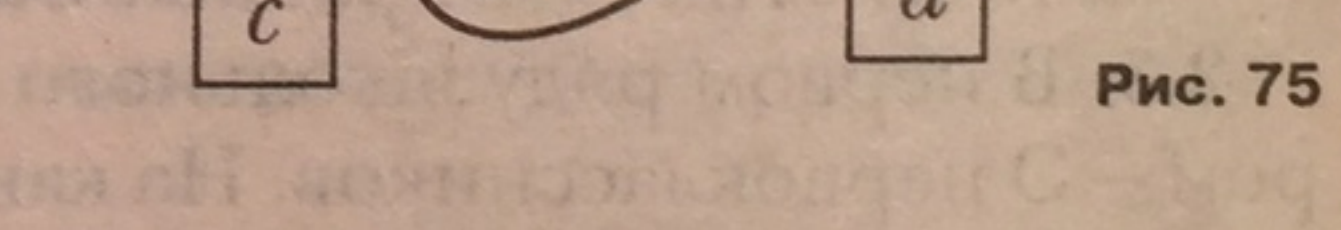


Рис. 74

1.8 На рисунке 74 изображены Машина и Рыболов. С

1.9. Найди и запиши, чему равны значения a^k при $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

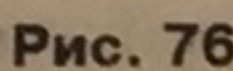
на рисунке 75, с помощью последовательности: J T P A V W C R ...



омощью знаков этой последова-

1.10. С помощью знаков последовательности $O \rightarrow T \rightarrow A \rightarrow V \rightarrow C \rightarrow R \dots$

запиши, чему равны количества, изображенные на рисунке 7б:



чтобы каждое количество было обозначено.

1.11. Нарисуй количества $a = \mathfrak{d}$, $b = \mathbb{V}$, $c = \Theta$, $d = \Lambda$, если они обозначены с помощью последовательности:

$\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$

Пример 2

2.1. Во дворе гуляют a мальчиков и b девочек (рис. 77). Найди и запиши, какими знаками последовательности $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$ надо обозначить количества a , b , $a + b$, если

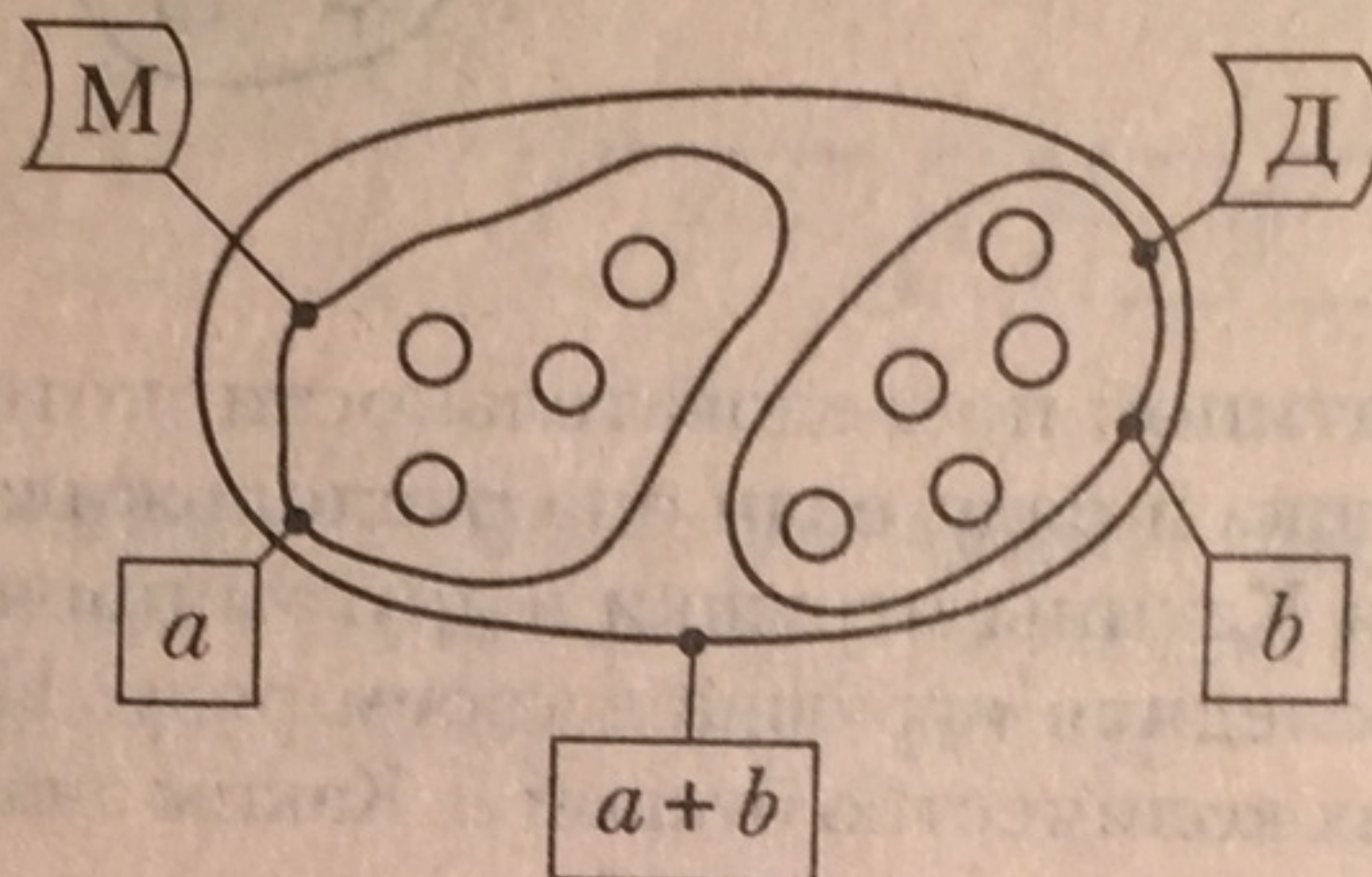


Рис. 77

Можно записать $a + b = \mathbb{V} + \Lambda = \mathbb{P}$.

Объясни, почему сумму $\mathbb{V} + \Lambda$ можно найти так, как показано на рисунке 76:

$\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$
 $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$

2.2. Найди, чему равны следующие суммы, если использованные знаки есть элементы последовательности $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$.

$\perp + \perp, \mathbb{T} + \mathbb{T}, \mathbb{T} + \mathbb{T}, \mathbb{V} + \mathfrak{A}, \mathfrak{A} + \mathbb{P}, \mathfrak{C} + \mathbb{T}, \mathbb{T} + \mathfrak{C}, \mathbb{P} + \mathcal{O}, \mathcal{O} + \mathbb{P}$.

Какие из этих сумм равны? Запиши равенства.

2.3. В первом ряду школьного зала сидели Λ первоклассников, а во втором — \mathfrak{C} первоклассников. На каком ряду их больше? Отметь красным цветом число первоклассников в первом ряду, а зеленым — во втором, если эти числа являются знаками последовательности $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$. Найди, какое число нужно прибавить к Λ , чтобы получить \mathfrak{C} . На сколько больше первоклассников сидели во втором ряду, чем в первом? На сколько их меньше в первом ряду, чем во втором?

2.4. На одной полке \mathfrak{d} книг, на другой на \mathbb{V} больше. Запиши выражением количество книг на второй полке. Найди его значение, если все числа есть знаки последовательности $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$.

2.5. Катя прочитала \mathbb{V} страниц, это число на \perp меньше, чем число страниц, которые прочитал Петя. Запиши количество страниц, прочитанных Петей, выражением и найди его значение, если все числа — знаки последовательности $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$.

2.6. Сравни числа \mathbb{P} и \mathfrak{C} в последовательности. Найди, на сколько одно из них больше другого, на сколько одно из них меньше другого, если последовательность такова: $\mathcal{O} \perp \mathbb{T} \mathfrak{A} \mathbb{P} \mathbb{V} \mathfrak{C} \mathbb{P} \Theta \dots$.

Пример 3

3.1. У Маши \mathcal{O} карандашей. Λ карандашей она отдала сестре. Запиши количество оставшихся у Маши карандашей выражением и найди его значение, если все числа — знаки последовательности $\mathcal{O} \Gamma \Gamma \mathcal{P} \Lambda \Pi \Psi \mathcal{O} \mathcal{P} \Theta \dots$.

Значение этой разности можно так найти:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathcal{O} & \Gamma & \Gamma & \mathcal{P} & \Lambda & \Pi & \Psi & \mathcal{O} & \mathcal{P} & \Theta & \dots \\ & & & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & & & \mathcal{P} & \Lambda & \Pi & \end{array}$$

Следовательно, $\mathcal{O} - \Lambda = \mathcal{P}$.

Число \mathcal{P} показывает, какое число надо прибавить к Λ , чтобы получить \mathcal{O} . Действительно,

$$\begin{array}{cccccccccccc} \mathcal{O} & \Gamma & \Gamma & \mathcal{P} & \Lambda & \Pi & \Psi & \mathcal{O} & \mathcal{P} & \Theta & \dots \\ & & & & & & & \uparrow & & & \\ & & & & & & & \mathcal{P} & \Gamma & \mathcal{O} & \end{array}$$

Следовательно, если $\mathcal{O} - \Lambda = \mathcal{P}$, то $\Lambda + \mathcal{P} = \mathcal{O}$.

Найди еще одно выражение, значение которого также известно.

Проверь себя с помощью последовательности.

3.2. Ване \mathcal{O} лет, а его сестра на Γ года младше. Запиши выражение, обозначающее количество лет Ваниной сестры. Найди его значение с помощью последовательности $\mathcal{O} \Gamma \Gamma \mathcal{P} \Lambda \Pi \Psi \mathcal{O} \mathcal{P} \Theta \dots$.

3.3. День рождения Пети наступит через \mathcal{P} дней, а день рождения Маши на \mathcal{P} дней раньше. Через сколько дней наступит день рождения Маши? Запиши выражение и найди его значение с помощью последовательности $\mathcal{O} \Gamma \Gamma \mathcal{P} \Lambda \Pi \Psi \mathcal{O} \mathcal{P} \Theta \dots$.

3.4. Петя и Ваня сажали кусты смородины. Петя посадил Ψ кустов. Это оказалось на Γ кустов больше, чем посадил Ваня. Каким выражением нужно записать количество кустов, которые посадил Ваня? Найди значение этого выражения с помощью последовательности $\mathcal{O} \Gamma \Gamma \mathcal{P} \Lambda \Pi \Psi \mathcal{O} \mathcal{P} \Theta \dots$.

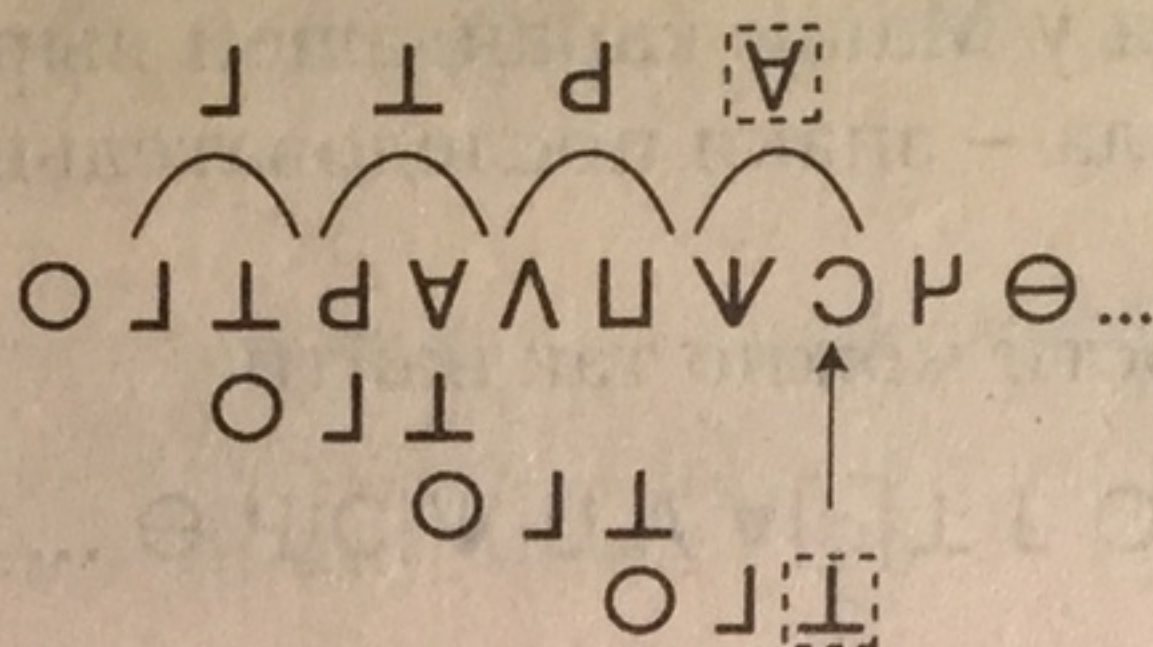
3.5. С помощью последовательности $\mathcal{O} \Gamma \Gamma \mathcal{P} \Lambda \Pi \Psi \mathcal{O} \mathcal{P} \Theta \dots$ Петя нашел, что $\Pi - \Gamma = \Psi$. Запиши еще два равенства с этими числами и проверь себя.

Пример 4

4.1. Маша прочитала книгу за Ψ дней. Каждый день она прочитывала Γ страниц. Требуется узнать, сколько страниц содержит книга, если числа — знаки последовательности $\mathcal{O} \Gamma \Gamma \mathcal{P} \Lambda \Pi \Psi \mathcal{O} \mathcal{P} \Theta \dots$.

Страницы, прочитанные в первый день отметим сверху последовательности знаком Π и напомним над ним знак Γ , который показывает, что это страницы, прочитанные в первый день. Затем отметим еще столько же страниц дугой сверху. Чтобы не ошибиться, страницы, прочитанные во второй день, пометим знаками начала последовательности, начиная от страниц, прочитанных в первый день. Сверху напомним знак Γ , который отмечает, что эти страницы прочитаны во второй день.

Так поступаем до тех пор, пока количество отмеченных дней не станет равным ∇ . Получаем:



Последний отмеченный знак последовательности показывает искомое число страниц в книге. Это число равно \mathcal{O} . Его можно записать выражением $\perp + \perp + \perp + \perp$, где число слагаемых равно ∇ . Значит, число страниц, прочитанных Машей, можно записать как произведение $\perp \cdot \nabla$. Оно равно \mathcal{O} . Получили равенство

$$\perp \cdot \nabla = \mathcal{O}.$$

Петя читал эту же книгу \perp дней, но каждый день прочитывал ∇ страниц. Найди произведение $\nabla \cdot \perp$.

Прочитал ли Петя всю книгу?

4.2. Катя решила \perp задач по математике, а Ваня в \mathcal{P} раз больше. Используя последовательность $\mathcal{O} \perp \mathcal{P} \nabla \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{C} \mathcal{R} \mathcal{O} \dots$, найди число задач, которые решил Ваня.

4.3. В доме, где живет Катя \mathcal{P} этажей. Это число в \perp раз меньше, чем число этажей в доме, где живет Ваня. Используя последовательность $\mathcal{O} \perp \mathcal{P} \nabla \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{C} \mathcal{R} \mathcal{O} \dots$, найди число этажей в Ванином доме.

4.4. Маша получила ∇ отличных оценок по математике, а Петя — \mathcal{O} отличных оценок. Во сколько раз число отличных оценок Пети больше числа отличных оценок Маши? Найди это число с помощью последовательности $\mathcal{O} \perp \mathcal{P} \nabla \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{C} \mathcal{R} \mathcal{O} \dots$.

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, надо найти, на какое число следует умножить ∇ , чтобы получить \mathcal{O} . Это можно сделать так:

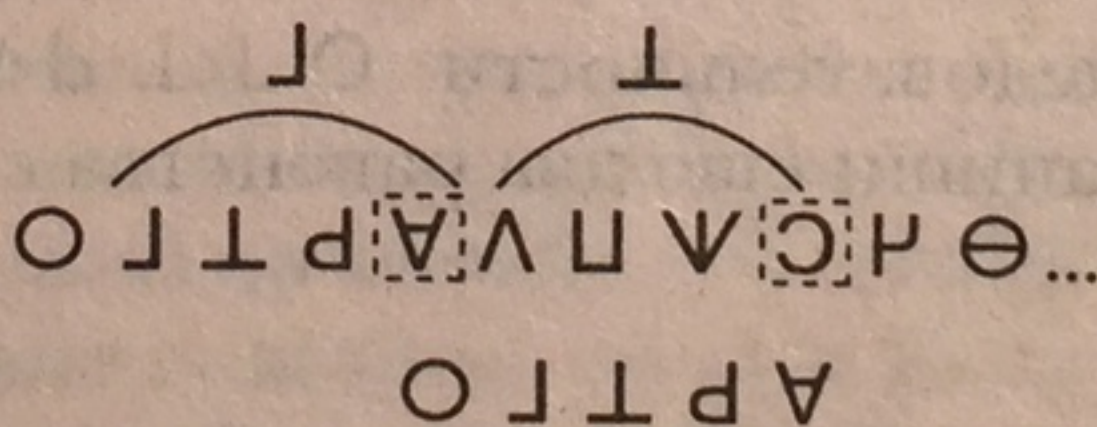


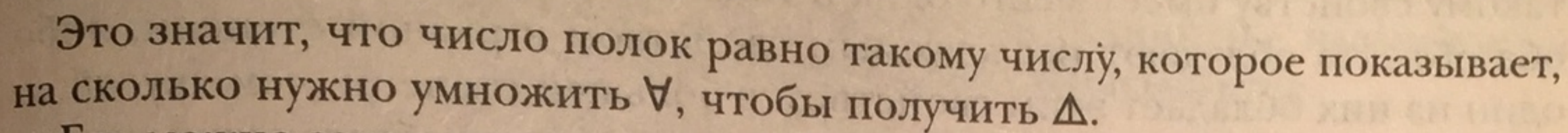
Схема показывает, что $\nabla \cdot \perp = \mathcal{O}$. Таким образом, Петя получил в \perp раз больше отличных оценок.

Пример 5

5.1. Δ книг поставили на полки. На каждую полку ∇ книг. Требуется найти, сколько полок заняли эти книги.

Для того, чтобы найти число полок, можно поступить так.

Отметим в последовательности $\mathcal{O} \perp \mathcal{P} \nabla \mathcal{A} \mathcal{V} \mathcal{C} \mathcal{R} \mathcal{O} \mathcal{P} \Delta \dots$ число ∇ , затем от отмеченного места продвинемся еще на ∇ мест. Будем поступать так до тех пор, пока не дойдем до числа Δ .



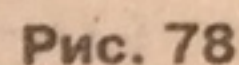
Его можно записать с помощью действия деления $\Delta : \nabla = \rho$.

Следовательно, если $\forall \cdot \mathbf{p} = \Delta$, то $\Delta : \forall = \mathbf{p}$.

5.2. Пете надо решить Δ задач за d дней. Он задумал ежедневно решать одно и то же число задач. Сколько задач требуется ему решать каждый день?

Число задач, которое должен решать каждый день Петя — это такое число, умножая которое на d , получаем Δ . Значит, оно равно частному $\Delta : d$.

Чтобы его найти с помощью последовательности, можно поступить так:



Следовательно, $\Delta : d = \forall$ и Пете каждый день нужно решать \forall задач. Значит, если $\Delta : d = \forall$, то $\forall \cdot d = \Delta$.

5.3. Найди, во сколько раз Υ больше Λ , если эти числа — знаки последовательности $O \downarrow T R A V U O R E \square \Delta \diamondstar \Upsilon \dots$.

Запиши три равенства.

5.4. В зимние каникулы Маша каталась на коньках \square дней. Это в \perp раз больше, чем число дней, когда она ходила на елку.

Найди, сколько дней ходила Маша на елку, если все числа — знаки последовательности О Г Т А Р А П В С....

5.5. Найди частные $\Theta : \Lambda$, $\Theta : \perp$, $\Pi : \mathcal{A}$. Запиши произведения, которые ты при этом узнаешь, если числа — знаки последовательности:

5.6. Первokлассники изготовили для новогодней елки гирлянду из красных и синих флажков. Красных флажков оказалось в \perp раз больше, чем синих, а синих — \sqcup штук. Всего флажков в гирлянде Δ штук.

Запиши все равенства, которые известны.

§ 4. Число как мера величины

Величина, так же как число, является одним из основных математических понятий. Примерами величин могут служить длина, площадь, масса, время и др. Каждая из величин выделяет некоторое свойство объектов, по которому их можно сравнивать. Способ сравнения, особый для каждого выделенного свойства, позволяет выделить определенный род величины. Например, сравнивая отрезки наложением, приходим к по-

нятие длины. Сравнение физических объектов с помощью рычажных весов приводит к понятию массы, сравнение длительности процессов — к понятию времени и т.п.

Причем мы рассматриваем свойства, что при сравнении объектов по такому свойству имеет место одна и только одна из возможностей: либо оба объекта обладают исследуемым свойством в равной степени, либо один из них обладает этим свойством в большей степени, чем другой.

Такое положение позволяет найти класс объектов, обладающих указанным свойством в одной и той же мере, и считать то общее, которым обладают все объекты данного класса, величиной определенного рода.

Тогда в пределах системы всех однородных величин (т.е. в пределах всех длин, площадей и пр.) можно установить отношение неравенства: две величины одного и того же рода либо совпадают, либо одна из них больше другой.

Для каждого рода величин определенным образом устанавливается операция сложения. Например, суммой двух длин является длина такого отрезка, что он составлен из отрезков данных длин так, что оба отрезка расположены на одной прямой без промежутка и без наложения одного на другой. Суммой двух масс является масса двух предметов и т.д.

Отсюда следует, что если a и b — длины, то сумму $a \oplus b$ можно найти следующим образом. Возьмем отрезок AB длины a , затем отрезок CD длины b . На прямой l построим отрезок $A'B'$, равный AB , и отрезок $C'D'$, равный CD , так, что точки B' и C' совпадут. Если длина $A'D'$ равна c , то $a \oplus b = c$.

В пределах системы каждой из рассматриваемых однородных величин отношения неравенства и операция сложения обладают определенными свойствами.

1. Каковы бы ни были a и b , имеет место одно и только одно из соотношений $a = b$, $a < b$, $a > b$.

2. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

3. Для любых двух величин a и b существует единственным образом определенная величина c такая, что $a \oplus b = c$.

4. Для любых двух величин a , b $a \oplus b = b \oplus a$.

5. Для любых величин a , b и c $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

6. Для любых двух величин a и b $a \oplus b > a$.

7. Если $a > b$, то существует одна и только одна такая величина c , что $a = b \oplus c$.

8. Любую величину a можно представить в виде суммы двух величин b и c . В частности, в виде суммы равных между собой величин.

Отсюда следует, что любую величину можно представить в виде суммы произвольного числа величин, меньших данной. В частности, для любой величины a найдется такая величина b , что $a = b \oplus b \oplus \dots \oplus b$ или, что то же самое, $a = nb$, где n — число слагаемых.

9. Каковы бы ни были величины a и b , найдется такая величина c , что $a < c$ и $c = b \oplus b \oplus \dots \oplus b$.

Для величин, обладающих указанным свойством, можно определить процесс измерения, в результате которого получаем число, называемое мерой величины.

Пусть даны величина a и некоторая величина e того же рода. Тогда, согласно свойству 9, найдется такая сумма $e \oplus e \oplus \dots \oplus e = c$, что $c > a$.

Возможны два случая:

а) Некоторая часть слагаемых этой суммы в точности равняется a . В этом случае мерой величины a , измеренной единицей e , называется число n слагаемых, сумма которых дает a , что записывается

$$m_e(a) = n.$$

б) Найдется такое число n слагаемых в этой сумме, что $e \oplus e \oplus \dots \oplus e > a$, но $n - 1$ слагаемое суммы дают величину, меньшую a . Тогда получаем $n - 1 < m_e(a) < n$.

В этом случае говорят, что мера a , измеренная единицей e , приближенно равна $n - 1$ с недостатком и равна приближенно n с избытком.

В силу свойства 6, имеем, что большей величине при фиксированной единице измерения соответствует большая мера.

Прежде всего отметим, что в качестве единицы измерения может быть взята любая величина данного рода. Отсюда следует, что мера или числовое значение любой величины определяется в зависимости от выбранной единицы, поэтому число, являющееся мерой величины, имеет вполне определенный смысл, если только указана единица измерения. Такое число иногда называют именованным. В этом состоит одно из кардинальных отличий чисел — мер величин — от чисел, являющихся характеристикой численности предметной совокупности, которое определяется однозначно данной совокупностью. Для мер величин выполняются следующие свойства:

1) *свойство аддитивности*: мера суммы величин равна сумме мер этих величин при условии, что все величины измерены одной и той же единицей, т.е.

$$m_e(a \oplus b) = m_e(a) + m_e(b);$$

2) *свойство мультипликативности меры*: мера данной величины в «новой» единице измерения равна произведению меры исходной единицы измерения в «новой» единице на меру данной величины в исходной единице, т.е. имеет место равенство

$$m_{e_1}(a) = m_{e_1}(e) \cdot m_e(a).$$

В случае, когда все меры рассматриваемых величин выражаются точно, т.е. в случае а), оба эти свойства могут быть легко усмотрены.

Пусть $m_e(a) = n$, $m_e(b) = k$. Тогда $a = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{n \text{ раз}}$, $b = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{k \text{ раз}}$, отсюда

$a \oplus b = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_{n+k \text{ раз}}$, следовательно,

$$m_e(a \oplus b) = m_e(a) + m_e(b).$$

Пусть $m_e(a) = n$, $m_{e_1}(e) = k$.

Найдем $m_{e_1}(a)$.

Так как $a = \underbrace{e \oplus e \oplus \dots \oplus e}_n$, $e = \underbrace{e_1 \oplus e_1 \oplus \dots \oplus e_1}_k$, то

$$a = \underbrace{(e_1 \oplus \dots \oplus e_1)}_k + \underbrace{(e_1 \oplus \dots \oplus e_1)}_k + \dots + \underbrace{(e_1 \oplus \dots \oplus e_1)}_k.$$

n

Отсюда

$$m_{e_1}(a) = k \cdot n = m_{e_1}(e) \cdot m_e(a).$$

Свойства аддитивности и мультипликативности меры позволяют определить операции сложения и умножения для чисел — мер величин.

Если $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$, то $n + k = m_e(a \oplus b)$. Иными словами, сумма $n + k$ есть мера величины $a \oplus b$ в той же единице, если n — мера a , k — мера b .

Пусть a и b — длины, n и k — числовые значения этих длин в выбранной единице измерения. Тогда, чтобы найти сумму $n + k$, можно поступить следующим образом.

Возьмем отрезок произвольной длины в качестве единицы. Построим отрезок, длина которого равна n , и отрезок, длина которого равна k . Построим сумму отрезков. Измерим полученный отрезок в той же единице. Это число и есть искомая сумма (рис. 79).

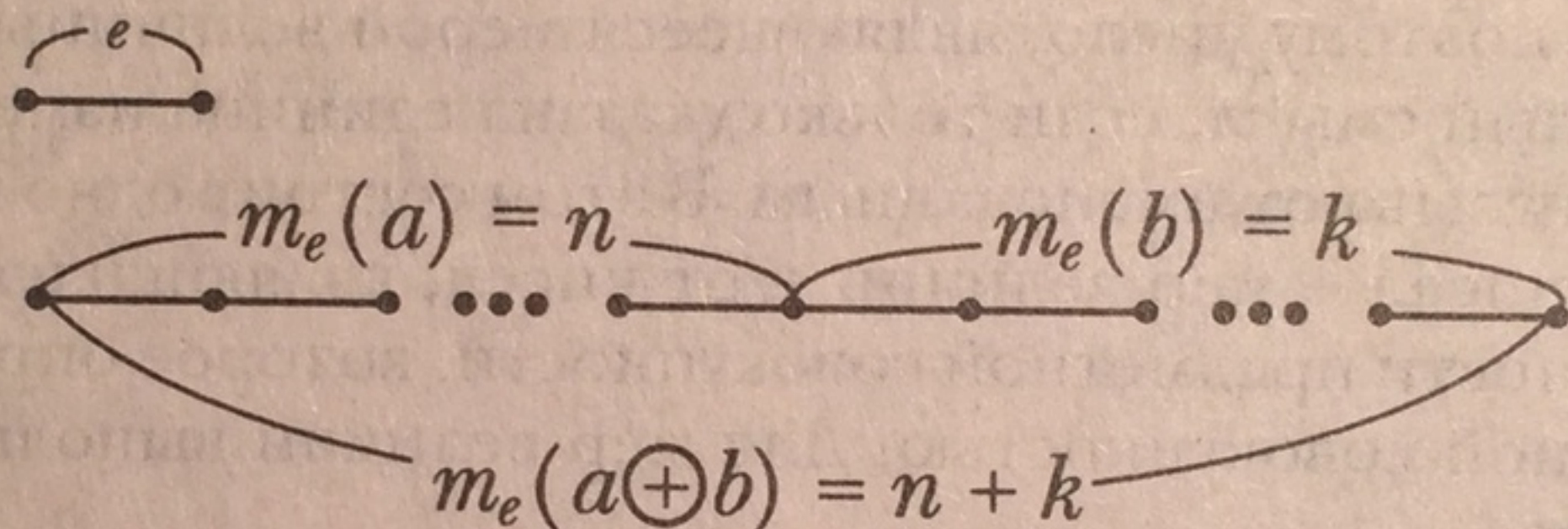


Рис. 79

Если $n = m_e(a)$, $k = m_{e_1}(e)$, то произведение $k \cdot n = m_{e_1}(a)$. Таким образом, произведение $k \cdot n$ есть мера величины a в такой единице e_1 , что мера первоначальной единицы, в которой мера a равнялась n , в единице e_1 равна k .

Пусть a , e , e_1 — длины, n — числовое значение длины a в единице e , k — числовое значение длины e в единице e_1 . Тогда, чтобы найти произведение $k \cdot n$, можно поступить следующим образом.

Возьмем отрезок произвольной длины в качестве единицы e_1 , затем построим отрезок e , длина которого равна $k = m_{e_1}(e)$. Построим отрезок a , числовое значение длины которого равно $n = m_e(a)$. Измерим этот отрезок единицей e_1 . Полученная мера есть искомое произведение (рис. 80).

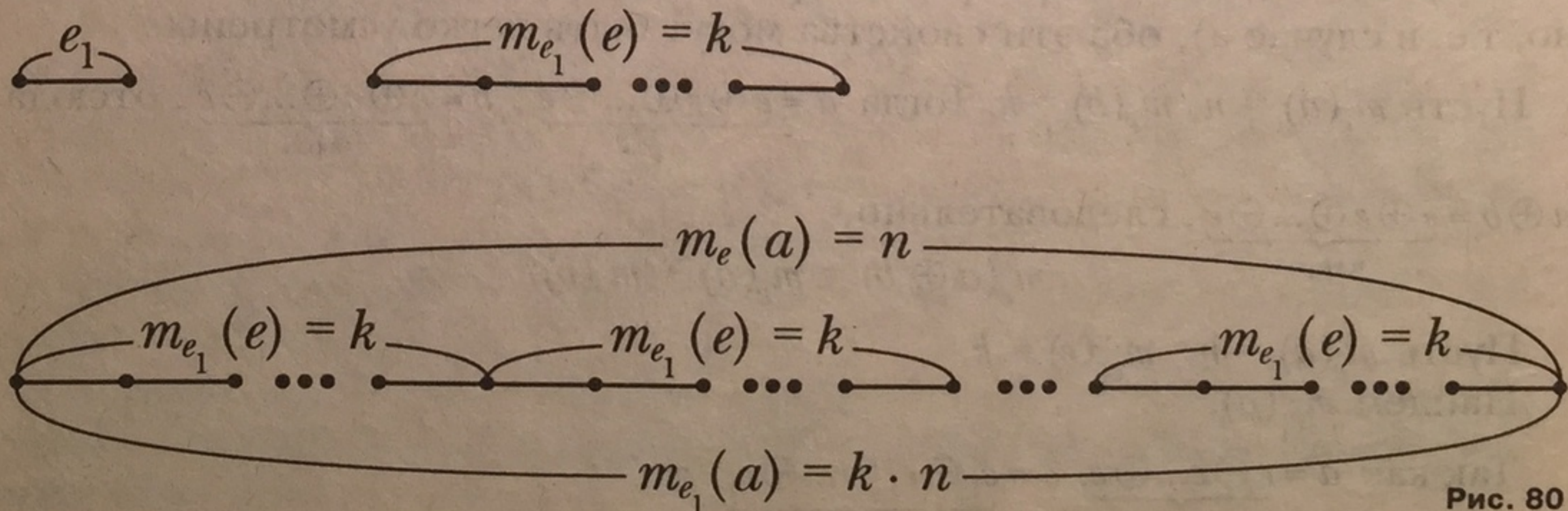


Рис. 80

Величины, удовлетворяющие свойствам 1–9, принято называть аддитивно-скалярными или положительными скалярными. В силу того, что их свойства одинаковы, любую аддитивно-скалярную величину можно изображать с помощью длин отрезков.

Если с этой целью взять луч, то каждая его точка соответствует вполне определенной величине, равной длине отрезка от начала луча до рассматриваемой точки. Фиксировав на луче некоторую точку E , можно соответствующую ей длину взять в качестве единицы измерения. Тогда каждую длину, изображенную на луче, можно измерить этой единицей. Каждая величина, являющаяся суммой величин, равных выбранной единице измерения, может быть отмечена соответствующим числом (рис. 81).

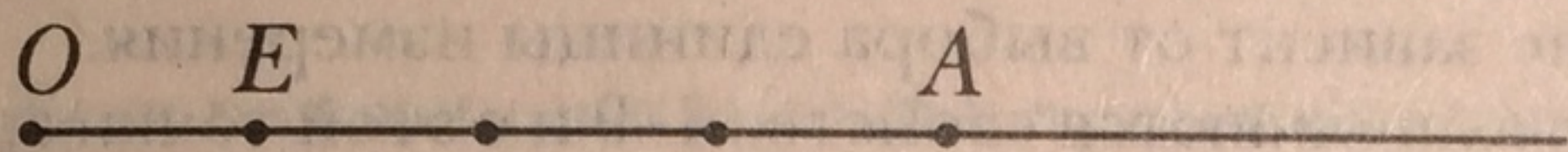


Рис. 81

Если величина a равна $e \oplus e \oplus \dots \oplus e$, то найдем точку A , соответствующую этой величине такую, что длина OA равна мере a в единице e .

Нетрудно видеть, что величины, представимые в виде суммы величин, равных единице измерения, далеко не исчерпывают всей системы величин данного рода. Это значит, что натуральных чисел недостаточно для того, чтобы каждой величине можно было найти соответствующую меру при фиксированной единице измерения. Геометрическая интерпретация натуральных чисел делает очевидным свойство дискретности множества натуральных чисел, которое означает, что найдутся такие пары чисел m и n , что «между ними» нет никакого натурального числа, т.е. неравенство $m < k < n$ не выполняется ни для какого натурального k .

Суммы и произведения натуральных чисел можно найти, используя их представление в виде мер величин на луче.

Пусть OE взят за единицу измерения, OA — длина, числовое значение которой в единице OE равно n , OB — длина, числовое значение которой в единице OE равно k .

Тогда на луче отложим от точки A отрезок, равный OB , получим точку C . Длина OC , измеренная единицей OE , равна сумме $n + k$ (рис. 82).

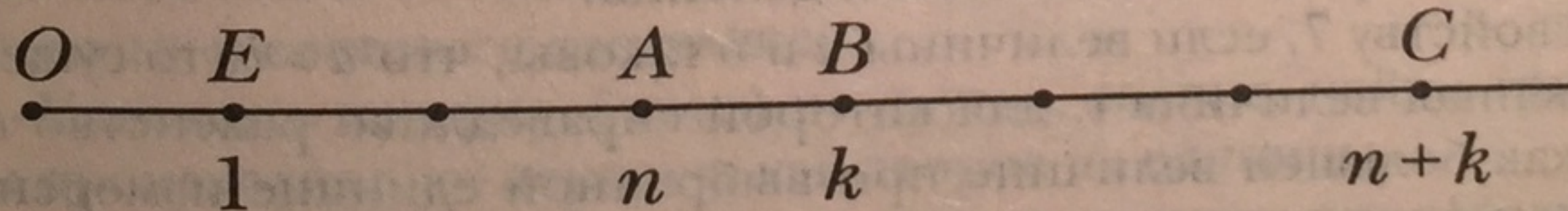


Рис. 82

Если требуется найти произведение $k \cdot n$, то построим на луче с началом в точке O отрезки OE и OE_1 такие, что $m_{OE_1}(OE) = k$. Затем построим отрезок OA , равный сумме n отрезков OE . Измерим длину OA единицей OE . Полученное число есть произведение $k \cdot n$ (рис. 83).

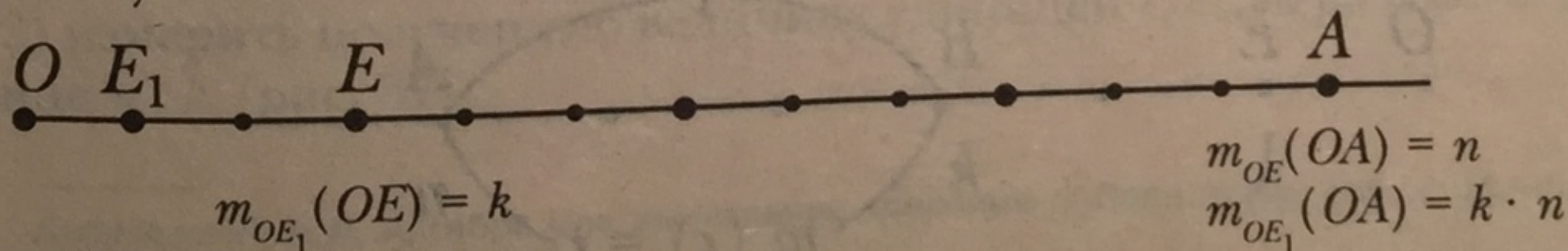


Рис. 83

Можно заметить, что результаты сложения и умножения чисел, рассматриваемых как меры величин, не зависят от выбора единицы измерения. Хотя именованные числа задают вполне определенные величины, операции над числами и величинами совершенно различны. Например, операция сложения величин не только не совпадает с операцией сложения чисел, но и имеет существенно разный смысл для каждого рода величин. В системе однородных величин не определена операция умножения, в то время как для чисел такая операция всегда выполнима и единственна. Но величину можно умножать на число, получая при этом величину того же рода. Подчеркнем, что рассмотренные выше операции сложения и умножения являются операциями над числами, но не над величинами. Хотя эти числа генетически являются мерами величин, результат каждой из операций не зависит от выбора единицы измерения.

Отметим, что для чисел выполняются свойства 1–9 и с этой точки зрения число можно трактовать как частный случай величины. Но в то же время есть свойства чисел, которые не выполняются для аддитивно-скалярных величин, поэтому требуется четкое разделение понятий «число» и «величина».

Подчеркнем еще одно отличие множества натуральных чисел от системы положительных скалярных величин определенного рода. Множество натуральных чисел линейно упорядочено и порядок этот дискретен, а линейный порядок на множестве величин непрерывен. Это свойство можно наглядно описать. Пусть имеется бесконечная последовательность таких отрезков, что каждый следующий находится внутри отрезка предшествующего ему. Тогда имеется единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности. То есть в системе положительных скалярных величин нет «дырок».

Но мы видели, что множество натуральных чисел можно рассматривать совершенно независимо от понятия величины и различными способами. Понятие «величина» имеет практический смысл только в том случае, если величина измерена. Процесс же измерения требует того или иного представления о числе.

Для чисел, являющихся мерами величин, можно естественным образом определить операции вычитания и деления.

Согласно свойству 7, если величины a и b таковы, что $a > b$, то существует единственная величина c , для которой справедливо равенство $a = b + c$. Так как большей величине при выбранной единице измерения соответствует большая мера, то для чисел n и k таких, что $n > k$ и $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$, число $t = m_e(c)$ является разностью чисел $n - k$.

Используя геометрическую интерпретацию чисел — мер величин, разность $n - k$ можно найти так, как показано на рисунке 84.

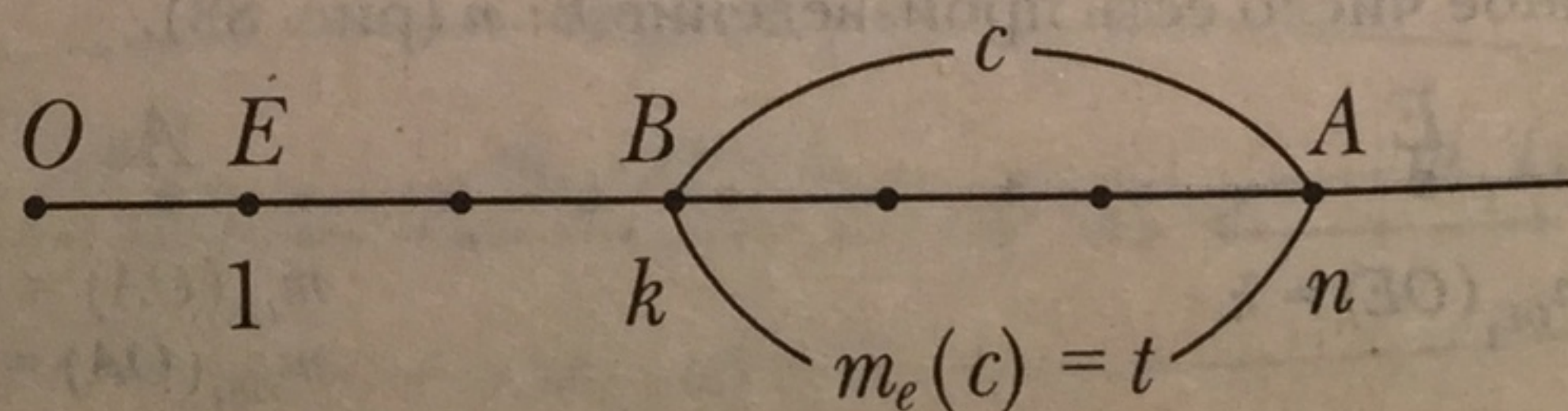


Рис. 84

Пусть требуется найти частное $n : k$, где $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$. По свойству мультипликативности меры имеем $m_e(a) = m_e(b) \cdot m_b(a)$. Отсюда $n = k \cdot t$, где $t = m_b(a)$. Значит, $t = n : k$ (рис. 85).

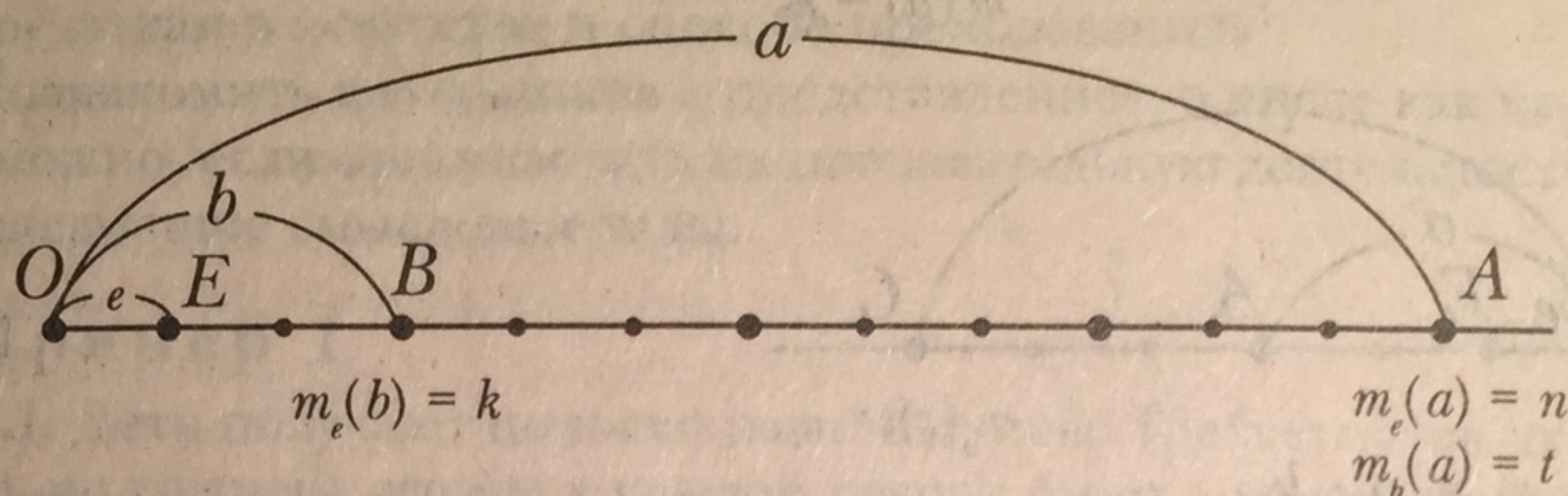


Рис. 85

Если положим $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$, то из равенства $m_e(a) = m_e(b) \cdot m_b(a)$ найдем, что частное $n : k = m_b(a)$, следовательно, частное есть мера величины b в единицах e , если мера a в единицах e есть n , а мера a в единицах b есть k .

Таким образом, частное может быть найдено двумя разными способами. В первом случае его принято называть делением по содержанию, а во втором — делением на равные части.

Соответствующая геометрическая интерпретация во втором случае может быть такой (рис. 86).

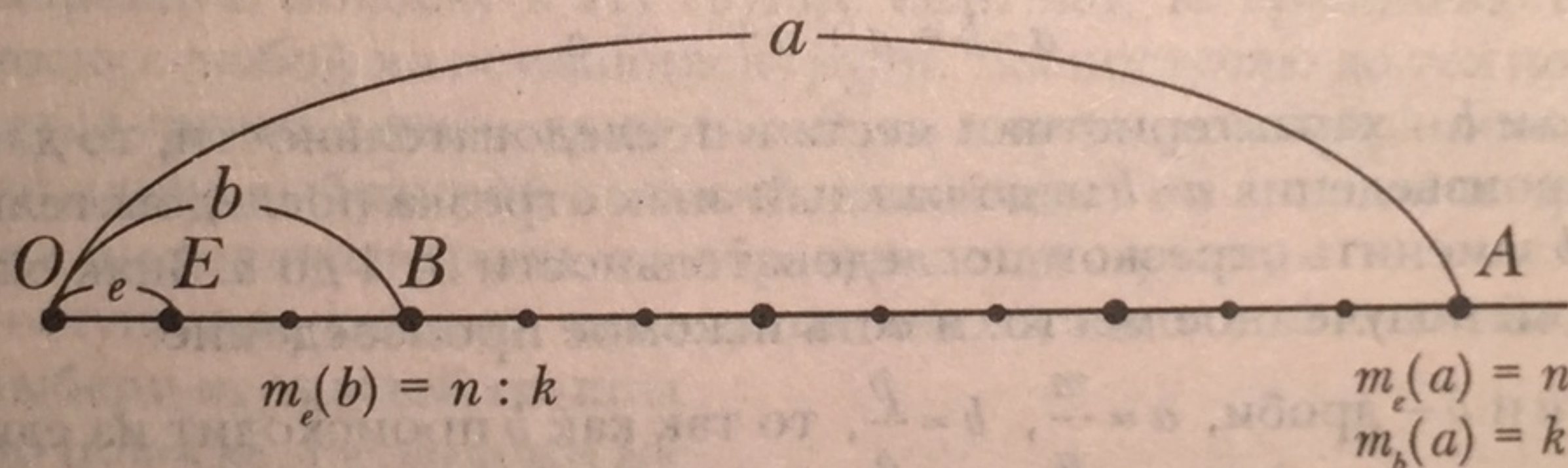


Рис. 86

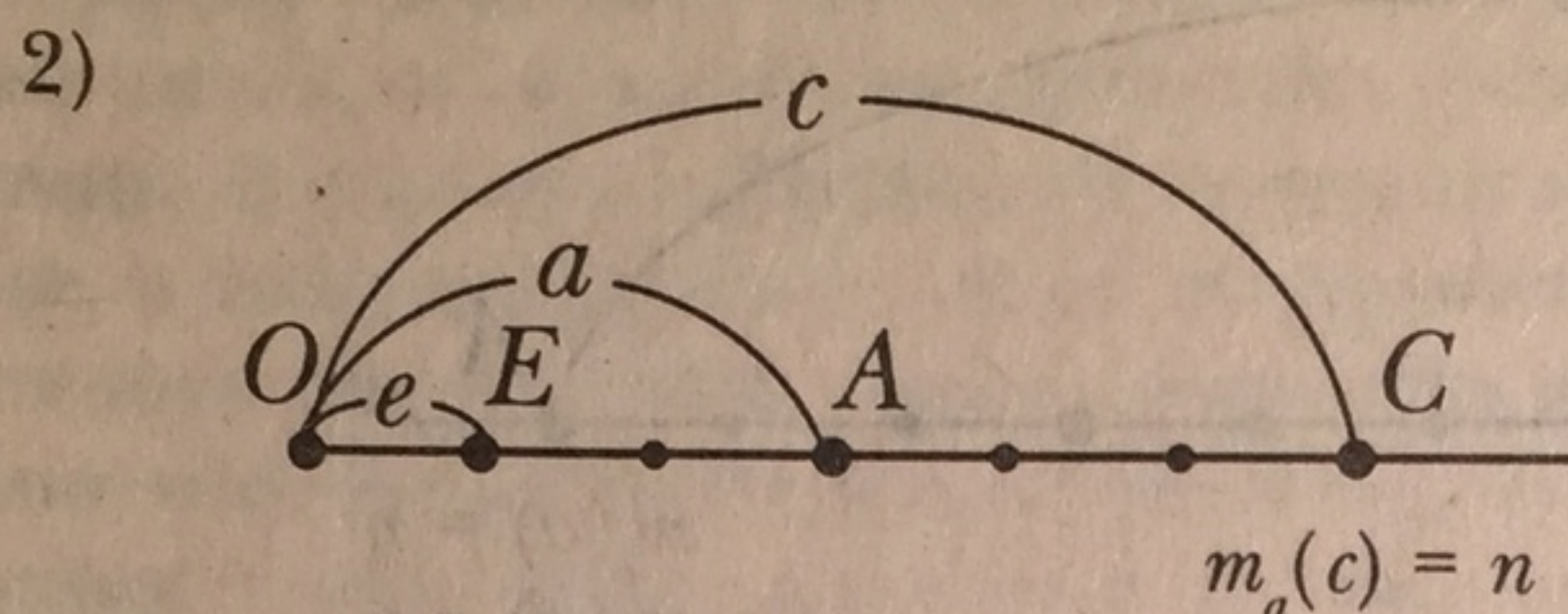
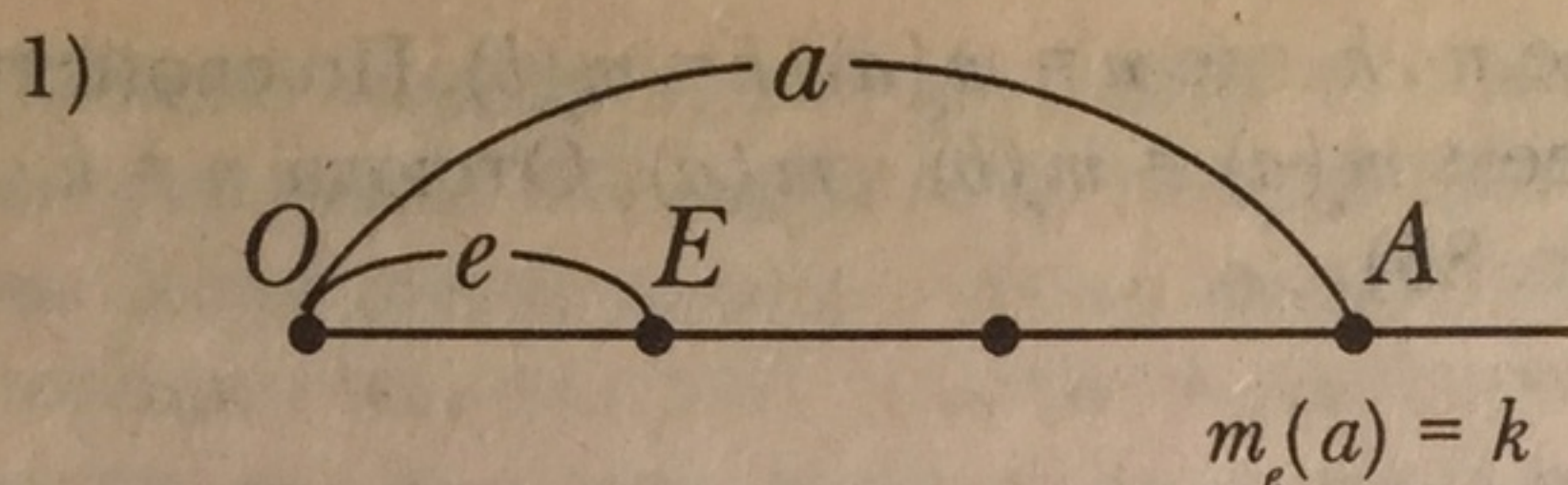
Необходимо отметить, что произведение чисел — мер величин — может быть иначе истолковано. Такое истолкование восходит к Н.И.Лобачевскому и состоит в следующем:

«Умножить колкое (число) на другое, значит, найти третье, которое бы происходило из первого, как второе из единицы»¹.

Согласно этому определению, для нахождения произведения $n \cdot k$, где $n = m_e(a)$, $k = m_e(b)$, следует поступить следующим образом:

- 1) построить величину (длину) a , мера которой в выбранной единице e равна k ;
- 2) построить из a как из единицы величину c , мера которой в a равна n ;
- 3) измерить полученную величину единицей e , ее мера и есть произведение $n \cdot k$. (рис. 87).

¹ Лобачевский Н.И. Алгебра или вычисление конечных // Полн. собр. соч. — М.—Л., 1948. — С. 49. — Т. 4.



3) $m_e(c) = n \cdot k.$

Рис. 87

Именно такое определение умножения дано в учебнике¹, хотя и в других терминах.

Существенно, что определение Н.И.Лобачевского является общезначимым, т.е. оно применимо как во всех интерпретациях натуральных чисел, так и в более широких числовых системах.

Например, количественное число b можно рассматривать как сумму единиц, и поэтому произведение $a \cdot b$ получается заменой каждой единицы, составляющей a , на b . Таким образом, имеем:

$$b = 1 + 1 + \dots + 1;$$

$$a \cdot b = a + a + \dots + a.$$

Если a и b — характеристики места в последовательности, то для получения произведения $a \cdot b$ надо каждый знак отрезка последовательности от 1 до b заменить отрезком последовательности от 1 до a . Знак, характеризующий полученное место, и есть искомое произведение.

Если a и b — дроби, $a = \frac{m}{n}$, $b = \frac{p}{q}$, то так как b происходит из единицы делением ее на q и умножением на p , то, поступая также с a , получаем

$$a \cdot b = \frac{mp}{nq}.$$

Если считать, что число $-b$, противоположное натуральному b , есть $\underbrace{(-1) + (-1) + \dots + (-1)}_{b \text{ раз}} = -b$, то произведение $a \cdot (-b) = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_{b \text{ раз}} = -a \cdot b$.

Так как $-(-a) = a$, то произведение

$$(-a)(-b) = \underbrace{(-(-a)) + (-(-a)) + \dots + (-(-a))}_{b \text{ раз}} = \underbrace{a + a + \dots + a}_{b \text{ раз}} = a \cdot b.$$

Первую часть книги «Алгебра или вычисление конечных» Н.И.Лобачевский предназначал для учащихся гимназий. В предисловии к рукописному варианту «Алгебры» он отмечал: «Два года читается Алгебра в Ка-

¹ Математика. 2 класс / В.В.Давыдов, С.Ф.Горбов, Г.Г.Микулина, О.В.Савельева. — М., 1995. — С. 95–103.

занской гимназии под моим руководством, и в последнее время я имел всю причину восхищаться успехами детей. ...Затем готов я думать, что если учение Математики, столь свойственное уму человеческому, остается для многих безуспешно, то это по справедливости должно приписать недостаткам в искусстве и способе преподавания»¹.

Познакомить школьников с представлением о числе как мере величины можно, если организовать их познавательную деятельность с опорой на следующие смысловые узлы.

Пример 1

1.1. Дети получают полоски разной длины. Требуется так их распределить по группам, чтобы в каждой группе были полоски одной и той же длины.

Последовательность рассуждений, а значит, и последовательность действий может быть такой:

1. Беру две полоски, наложением сравниваю их длины. Если длины равны, то отношу их в одну группу. Если длины различны, то отношу их в разные группы.

2. Беру еще одну полоску, сравниваю ее длину с какой-нибудь полоской из имеющейся группы. Если длины совпадают, отношу выбранную полоску в эту группу. Если длины различны, то беру полоску из другой имеющейся группы и сравниваю ее с выбранной. Если длины совпали, то отношу выбранную полоску в эту группу, если нет, то сравниваю выбранную полоску с любой из оставшихся групп. Так поступаю до тех пор, пока не найдется группа с полосками такой же длины, как выбранная.

3. Если длина выбранной полоски не совпадет ни с одной из длин полосок уже имеющихся групп, то образу новую группу.

Так поступаю до тех пор, пока не останется ни одной полоски.

1.2. Выбери из каждой группы по одной полоске. Расположи их так в порядке возрастания длин, чтобы каждая более длинная полоска следовала за каждой более короткой.

1.3. Построй отрезки, длины которых равны длинам данных полосок, в порядке их возрастания.

1.4. У Маши и Пети игрушки: кубик, мяч, зайчик, ведерко, лопатка, автомобиль, гриб. С помощью весов без гирь они сравнили их массы и нарисовали картинку, на которой стрелки говорят: «Моя масса больше» (рис. 88). Назови

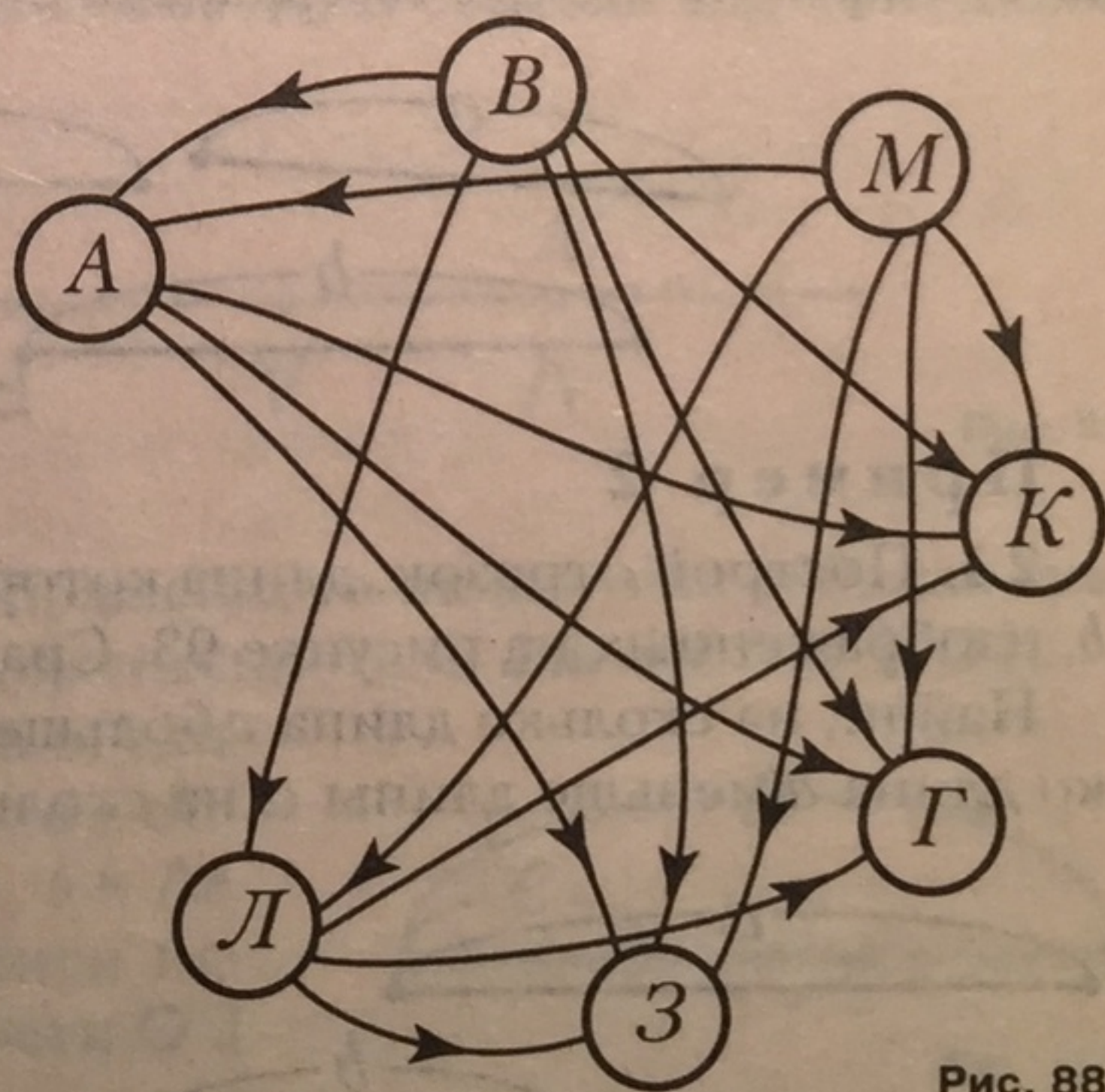


Рис. 88

¹ Лобачевский Н.И. Алгебра или вычисление конечных // Пол. собр. соч. — М.-Л., 1948. — С. 22. — Т. 4.

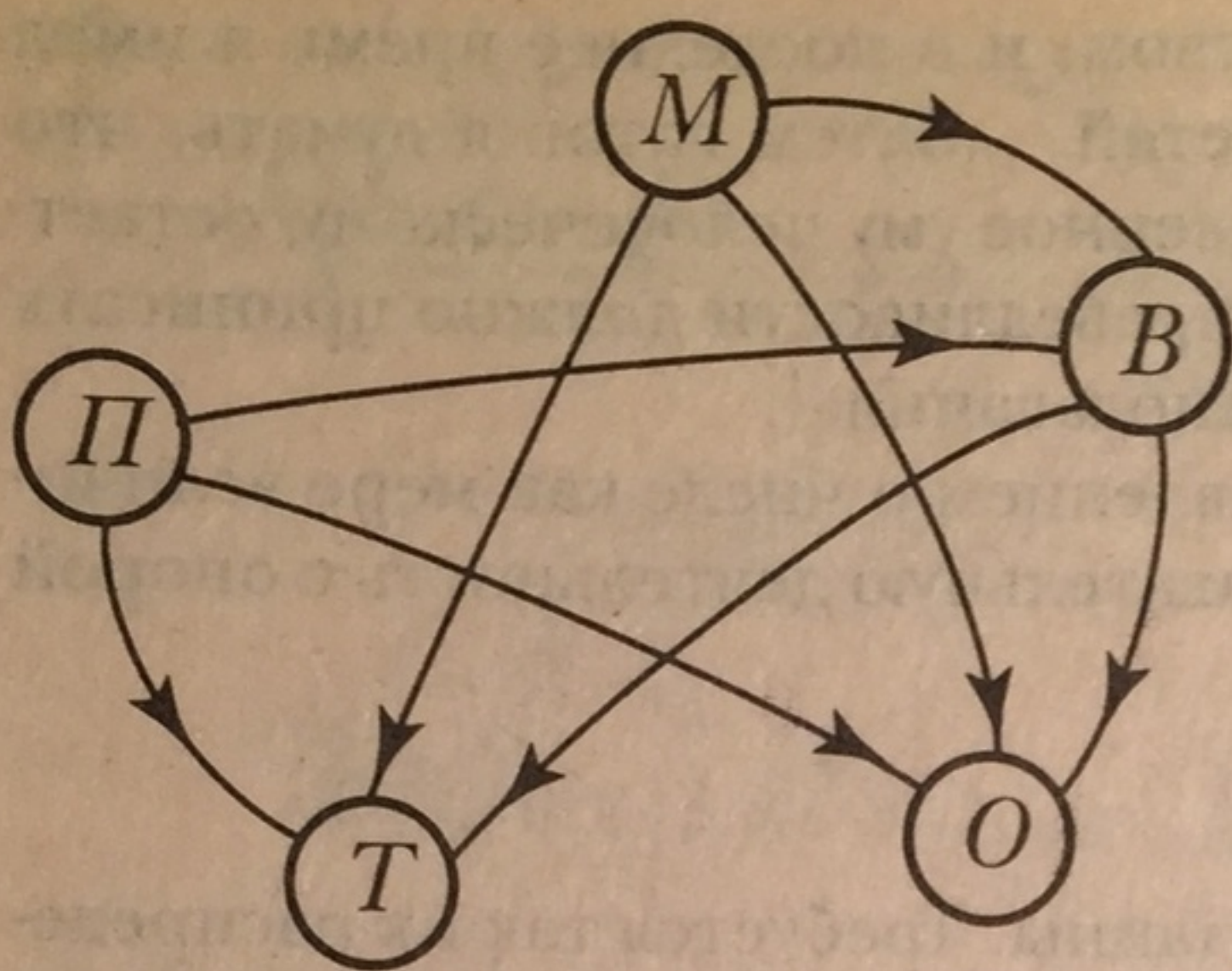


Рис. 89

игрушки, массы которых равны, и запиши в строку первые буквы их названий. Изобрази каждую массу отрезками так, чтобы большей массе соответствовал больший отрезок.

1.5. На рисунке 89 изображены Маша, Петя, Ваня, Таня и Оля. Стрелки *говорят*: «Я старше тебя». Изобрази отрезками возраст каждого из них так, чтобы большему возрасту соответствовал больший отрезок, а одинаковому возрасту — равные отрезки.

1.6. Сравни длины отрезков a и b . На схеме поставь стрелку, которая *говорит*: «Я длиннее тебя» (рис. 90).

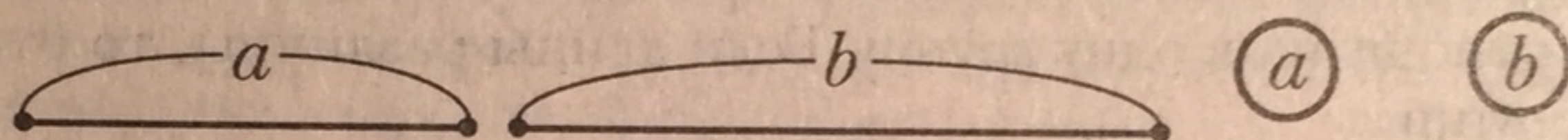


Рис. 90

1.7. Сравни длины отрезков a , b и c . Нарисуй схему, на которой стрелки *говорят*: «Я длиннее тебя» (рис. 91).

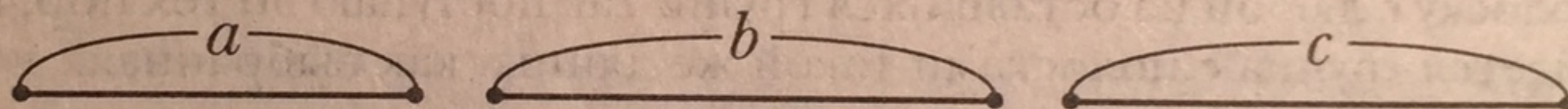


Рис. 91

1.8. Сравни длины отрезков a , b , c и d . Используй луч с началом в точке O . Нарисуй схему с *говорящими* стрелками (рис. 92).

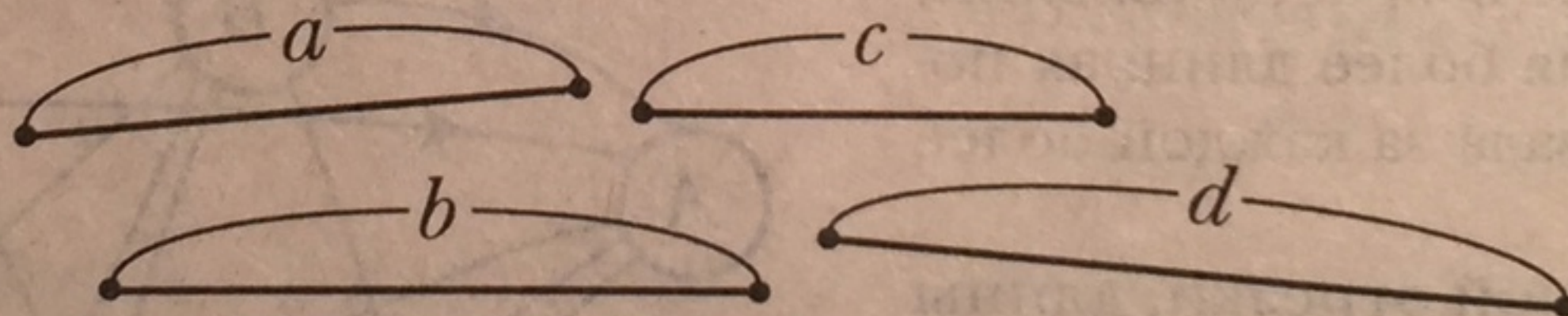


Рис. 92

Пример 2

2.1. Построй отрезок, длина которого c равна сумме длин отрезков a и b , изображенных на рисунке 93. Сравни длины a , b и c .

Найди, на сколько длина c больше длины a , больше длины b , на сколько длина a меньше длины c , на сколько длина b меньше длины c .

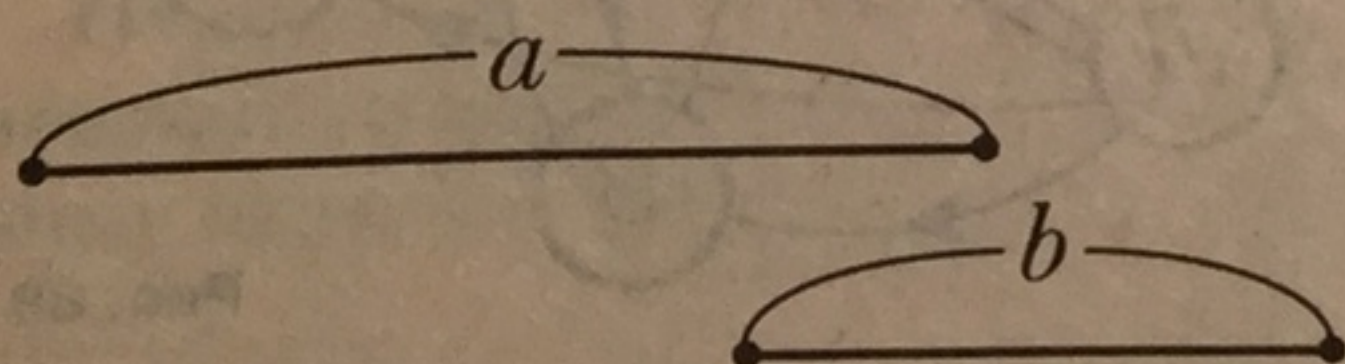


Рис. 93

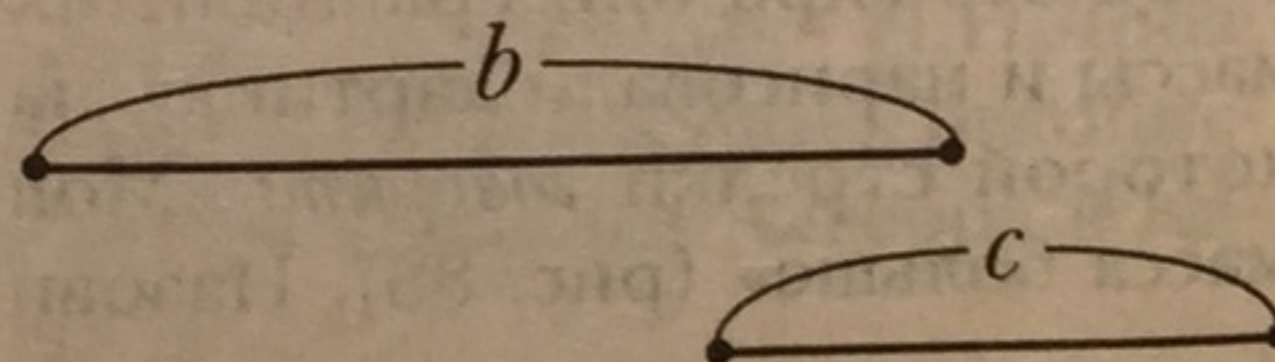


Рис. 94

2.4. Построй отрезок, длина которого a равна сумме длин отрезков b и c , так, чтобы начало этого отрезка совпадало с началом луча, изображенного на рисунке 96.

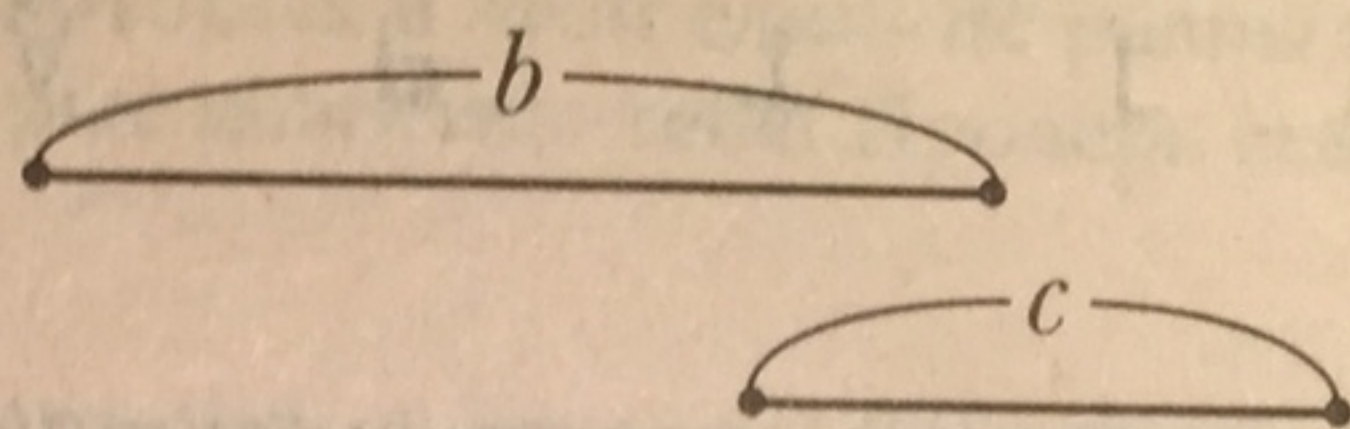


Рис. 95

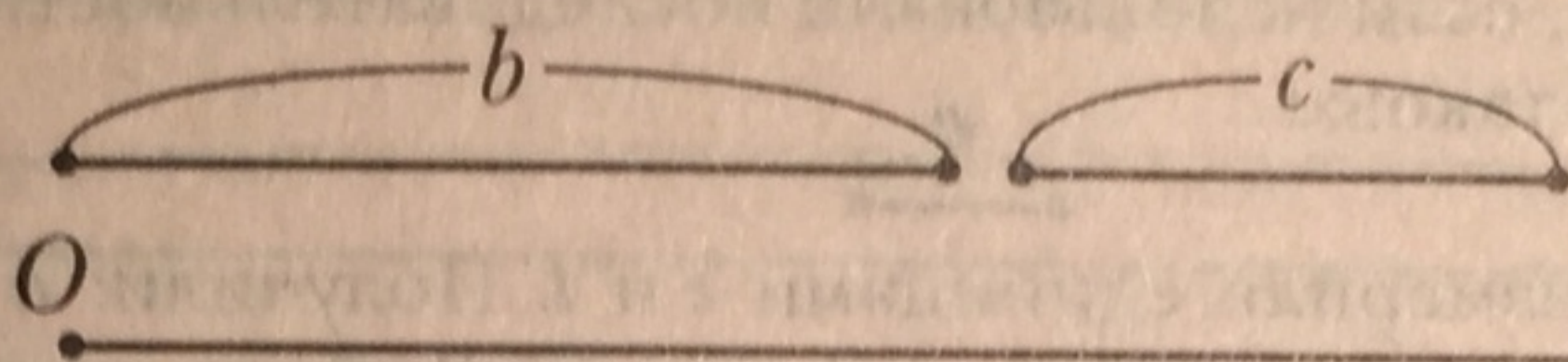


Рис. 96

Пример 3

Рис. 97

Рис. 98

Рис. 99

3.5. Известно, что длина $a = \perp e$, $b = \wedge e$. Какая из длин больше, если в записи использованы знаки последовательности $\circ \downarrow \vdash \vee \neg \dots$.

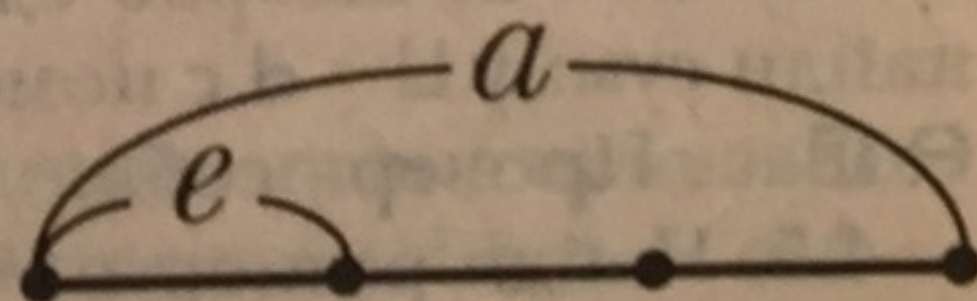


Рис. 100

3.6. На данном луче построй отрезки с началом в точке O , длины которых равны: $AO = 4e$, $OB = 1e$, $OC = 5e$. Сравни их длины. Запиши резуль-

тат сравнения с помощью знаков $>$, $<$ (рис. 101).

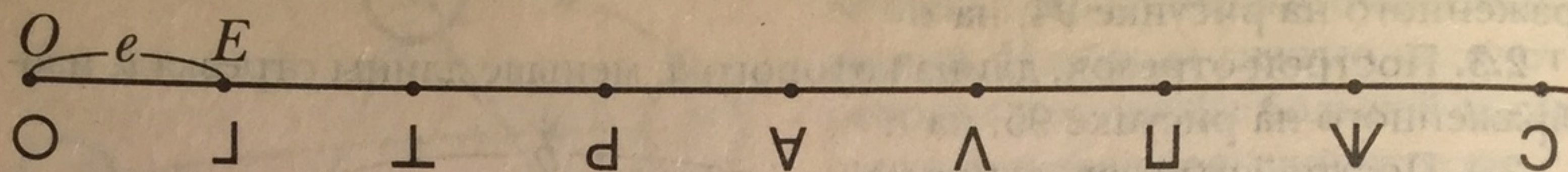
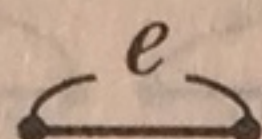


Рис. 101

3.7. Длины a , b , c измерили единицей e и получили: $a = \Lambda e$, $b = \perp e$, $c = \mathcal{O}e$. Построй отрезки, длины которых равны a , b , c и расположи их в порядке возрастания длин, если использовали последовательность $\mathcal{O} \perp \perp \mathcal{P} \Lambda \Lambda \perp \mathcal{V} \mathcal{O} \mathcal{P} \dots$, а длина e такова:



3.8. Длины a и b измерили единицами e и t . Получили: $a = \mathcal{O}e$, $b = \mathcal{O}t$. Можно ли утверждать, что длины a и b равны? Выбери единицы e и t и проверь построением.

3.9. Длину a измерили сначала единицей e и получили $a = \mathcal{V}e$, затем — единицей t и получили $a = \mathcal{O}t$. Какая из длин e или t больше, если для записи результата измерения использовали знаки последовательности $\mathcal{O} \perp \perp \mathcal{P} \Lambda \Lambda \perp \mathcal{V} \mathcal{O} \mathcal{P} \dots$.

Пример 4

4.1. Построй отрезки длиной a и b , если $a = \mathcal{V}e$, $b = \perp e$. Построй отрезок, длина которого равна сумме длин a и b . Измерь длину полученного отрезка той же единицей e , если e — длина отрезка $\mathcal{O} \perp \perp \mathcal{P} \Lambda \Lambda \perp \mathcal{V} \mathcal{O} \mathcal{P} \dots$. Запиши результат измерения с помощью последовательности $\mathcal{O} \perp \perp \mathcal{P} \Lambda \Lambda \perp \mathcal{V} \mathcal{O} \mathcal{P} \dots$.

Найди сумму $\mathcal{V} + \perp$. Сравни сумму $\mathcal{V} + \perp$ и результат измерения.

4.2. На данном луче построй отрезки $OA = \Lambda OE$, $OB = \perp OE$ и OC , длина которого равна сумме длин OA и OB . Измерь длину OC и запиши результат измерения (рис. 102).

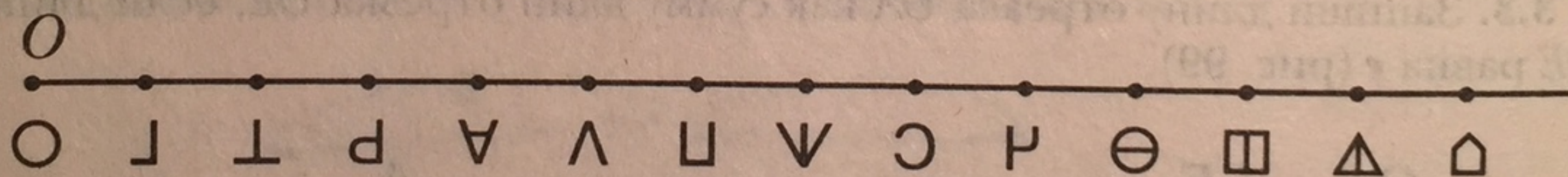


Рис. 102

4.3. Построй отрезок, длина которого c на b меньше, чем a , если $a = \mathcal{O}e$, $b = \mathcal{V}e$. Измерь длину полученного отрезка той же единицей e . Единицу измерения e выбери самостоятельно. Сравни разность $\mathcal{O} - \mathcal{V}$ с полученной мерой.

4.4. Известно, что $a = \perp e$, $b = \mathcal{O}e$, где a и b — длины отрезков. Найди сумму $\perp + \mathcal{O}$, выбрав единицу измерения самостоятельно. Для этого найди сумму $\perp + \mathcal{O}$ с помощью последовательности $\mathcal{O} \perp \perp \mathcal{P} \Lambda \Lambda \perp \mathcal{V} \mathcal{O} \mathcal{P} \dots$. Проверь себя.

4.5. Найди разность $\mathcal{P} - \mathcal{V}$, если известно, что $a = \mathcal{P}e$, $b = \mathcal{V}e$ — длины отрезков. Единицу измерения выбери самостоятельно. Проверь себя с помощью последовательности $\mathcal{O} \perp \perp \mathcal{P} \Lambda \Lambda \perp \mathcal{V} \mathcal{O} \mathcal{P} \dots$.

4.6. Найди сумму $\perp + \perp$. Для этого выбери отрезок произвольной длины e и построй отрезки, длины которых в этой единице равны $\perp e$ и $\perp e$.

Запиши разности, которые известны тебе. Проверь себя с помощью последовательности $\circ \perp \lrcorner \lrcorner \vee \wedge \sqcup \vee \circ \vdash \dots$.

4.7. Найди разность $\Theta - \Lambda$. Для этого выбери отрезок произвольной длины e и построй отрезки, длины которых в этой единице равны Θe и Λe . Запиши еще два равенства, которые известны тебе. Проверь себя.

Пример 5

5.1. На рисунке 103 изображены отрезки длин a , e , t . Измерь длину a единицей e , а длину e — единицей t . Запиши результаты измерения знаками последовательности $\circ \perp \lrcorner \lrcorner \vee \wedge \sqcup \vee \circ \vdash \Theta \dots$.

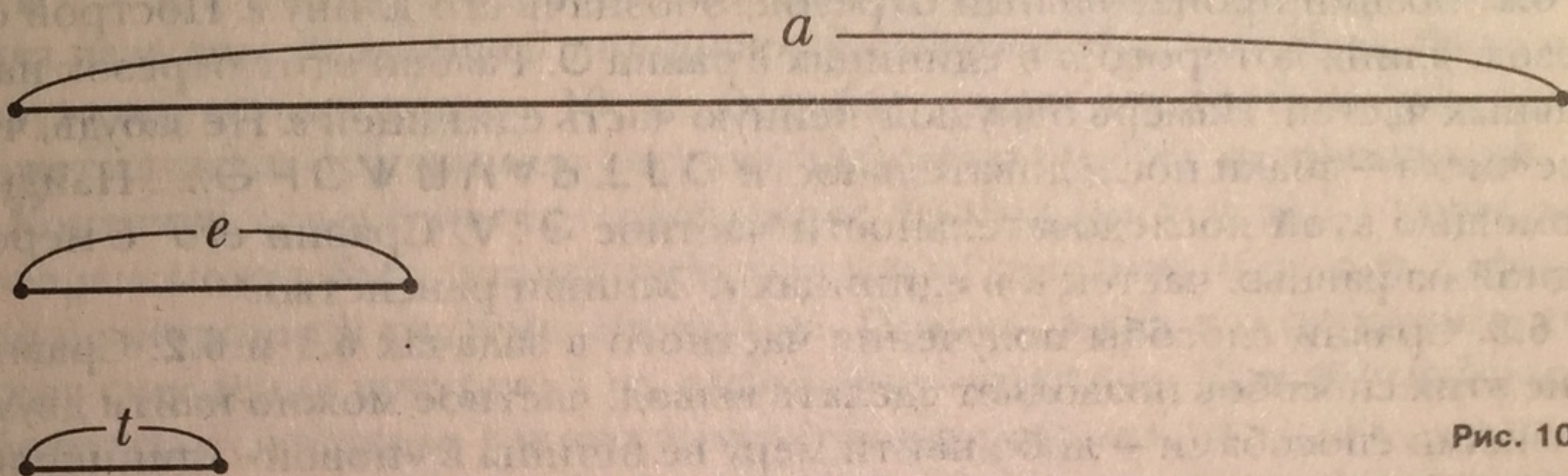


Рис. 103

Затем измерь единицей t длину a и также запиши результат измерения. С помощью последовательности найди произведение $\perp \cdot \vee$. Объясни, почему длину a можно записать так: $a = (\perp \cdot \vee)t$.

Таким образом, длина a в единицах t равна произведению $\perp \cdot \vee$, если длина a в единицах e равна \vee , а длина e в единицах t равна \perp .

5.2. Найди произведение $\perp \cdot \lrcorner$. Для этого можно поступить так: возьми какую-нибудь длину t (см. рис. 103). Затем построй отрезок длиной e в единицах t , равной \perp . Потом построй отрезок длины \lrcorner в единицах e . Измерь его единицей t . Эта мера и есть произведение $\perp \cdot \lrcorner$.

Проверь себя. Найди произведение $\perp \cdot \lrcorner$ с помощью последовательности $\circ \perp \lrcorner \lrcorner \vee \wedge \sqcup \vee \dots$.

5.3. Построй отрезок, длина которого a в \vee раз больше длины b отрезка, изображенного на рисунке 104, если \vee — знак последовательности $\circ \perp \lrcorner \lrcorner \vee \wedge \sqcup \vee \circ \vdash \Theta \sqsupset \Delta \hat{\Delta} \dots$.

Измерь a в единицах b . Измерь a в единицах e , если $b = \lrcorner e$. Произведением каких чисел является длина a в единицах e ?

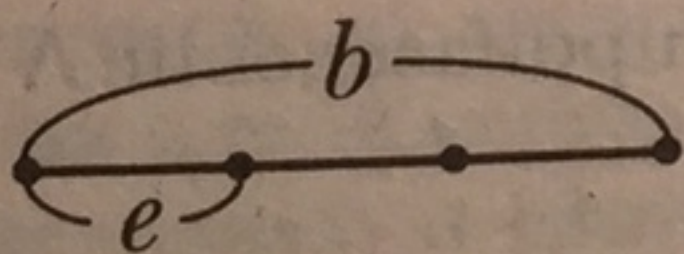


Рис. 104

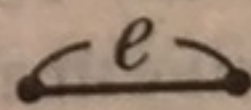


Рис. 105

5.4. Построй отрезок, длина которого a в единицах e равна произведению $\perp \cdot \Lambda$, если отрезок длины e представлен на рисунке 105, а \perp и Λ — знаки последовательности $\circ \perp \lrcorner \lrcorner \vee \wedge \sqcup \vee \circ \vdash \Theta \dots$.

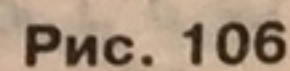
5.5. Длина a , измеренная единицей b , равна \sqcup ; длина b , измеренная единицей e , равна \perp . Найди и запиши длину a в единицах b , если все числа — знаки последовательности $\circ \perp \lrcorner \lrcorner \vee \wedge \sqcup \vee \circ \vdash \Theta \sqsupset \Delta \dots$.

Пример 6

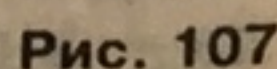
6.1. Возьми произвольный отрезок, обозначь его длину e . Построй от-

6.2. Возьми произвольный отрезок, обозначь его длину e . Построй отрезок, длина которого a в единицах e равна $\frac{3}{5}$. Разбей этот отрезок на 5 равных частей. Измерь одну полученную часть единицей e . Не забудь, что все числа — знаки последовательности $0 \frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5} \frac{1}{6} \frac{1}{7} \frac{1}{8} \frac{1}{9} \frac{1}{10} \dots$. Найди с помощью этой последовательности частное $\frac{3}{5}$. Сравни его с мерой одной из равных частей a в единицах e . Запиши равенство.

6.3. Сравни способы получения частного в задачах 6.1 и 6.2. Сравнение этих способов позволяет сделать вывод: частное можно найти двумя разными способами — либо найти меру величины в «новой» единице измерения, если делимое есть мера этой величины в «старой» единице, а делитель — мера «новой» единицы в «старой»; либо найти меру одной из равных частей данной величины в «старой» единице, если делимое есть мера величины в «старой» единице, а делитель — число частей, равных между собой, на которое делится данная величина.



6.5. По рисунку 107 найди частное $\Theta : \perp$ и произведение $\Lambda \cdot \perp$. Сравни полученные равенства и сделай вывод.



§ 5. Принципы построения позиционной системы счисления

Система счисления, или нумерация, — это совокупность приемов представления натуральных чисел. Письменная нумерация сопоставляет каждому числу определенную запись — обозначение или имя числа. Так как последовательность чисел неограниченна, то невозможно изобрести различные записи для каждого числа. Поэтому задача обозначения чисел на письме заключается в том, чтобы выделить некоторое количество знаков и правила, по которым можно записать любое число с помощью этих знаков. Такая задача оказалась чрезвычайно трудной и была решена только в V в. н.э. в Индии. Изобретенная индусами система счисления получила название *десятичной позиционной системы*. В дальнейшем было обнаружено, что не только 10, но и любое другое число, отличное от 1, может служить основанием системы счисления на тех же принципах.

Конечную совокупность, содержащую более одного знака, с помощью которых может быть записано любое число, принято называть алфавитом позиционной системы счисления. Поэтому каждая позиционная система счисления построена на *алфавитном принципе*. Знаками алфавита обозначаются первые p чисел натурального ряда так, что каждому числу сопоставляется один и только один знак. Следовательно, алфавит содержит p знаков. Это число называется основанием системы счисления. Например, десятичная система счисления содержит 10 знаков алфавита: 0, 1, ..., 9.

Знаки алфавита называют также цифрами. Каждое число, отличное от первых p чисел натурального ряда, записывается как последовательность цифр. Принцип построения этой последовательности можно усмотреть, если решать задачу счета предметов некоторой конечной совокупности.

Если рассматриваемая совокупность содержит не более чем $p - 1$ предметов, то каждое из таких количеств может быть записано одним из знаков алфавита. Эти записи получили название однозначных чисел. Если пересчитываемая совокупность содержит более чем $p - 1$ предметов, то от счета единичными предметами переходят к счету одинаковыми группами предметов, причем группу составляют из такого количества предметов, каково основание системы. Если таких укрупненных единиц не более чем $p - 1$, то их число также можно записать знаком алфавита. Если при пересчете некоторые предметы не составили ни одной укрупненной единицы, то первым членом последовательности записывают число укрупненных единиц, затем число предметов, не составивших ни одной укрупненной единицы. Значит, имеем две счетные единицы: исходную и единицу, укрупненную в p раз. Они называются *разрядовыми единицами*. Место записи разрядовых единиц в последовательности называется *разрядом*. Полученное в результате такого счета число называют *двузначным*.

Если единиц второго разряда, т.е. таких счетных единиц, которые образовались после первого укрупнения, оказалось больше чем $p - 1$, то естественно поступить аналогичным образом, т.е. укрупнить предыдущую разрядовую единицу снова в p раз. Продолжаем этот процесс до

тех пор, пока разрядовых единиц, полученных после очередного укрупнения, не станет меньше p . Число таких единиц также можно записать одной из цифр алфавита и приписать слева к полученной прежде последовательности.

Рассмотрим *пример*. Пусть в качестве основания системы счисления взято число 3. Возьмем знаками алфавита этой позиционной системы цифры: 0, 1, 2. Требуется в троичной системе записать количество элементов данной на рисунке 108 совокупности.

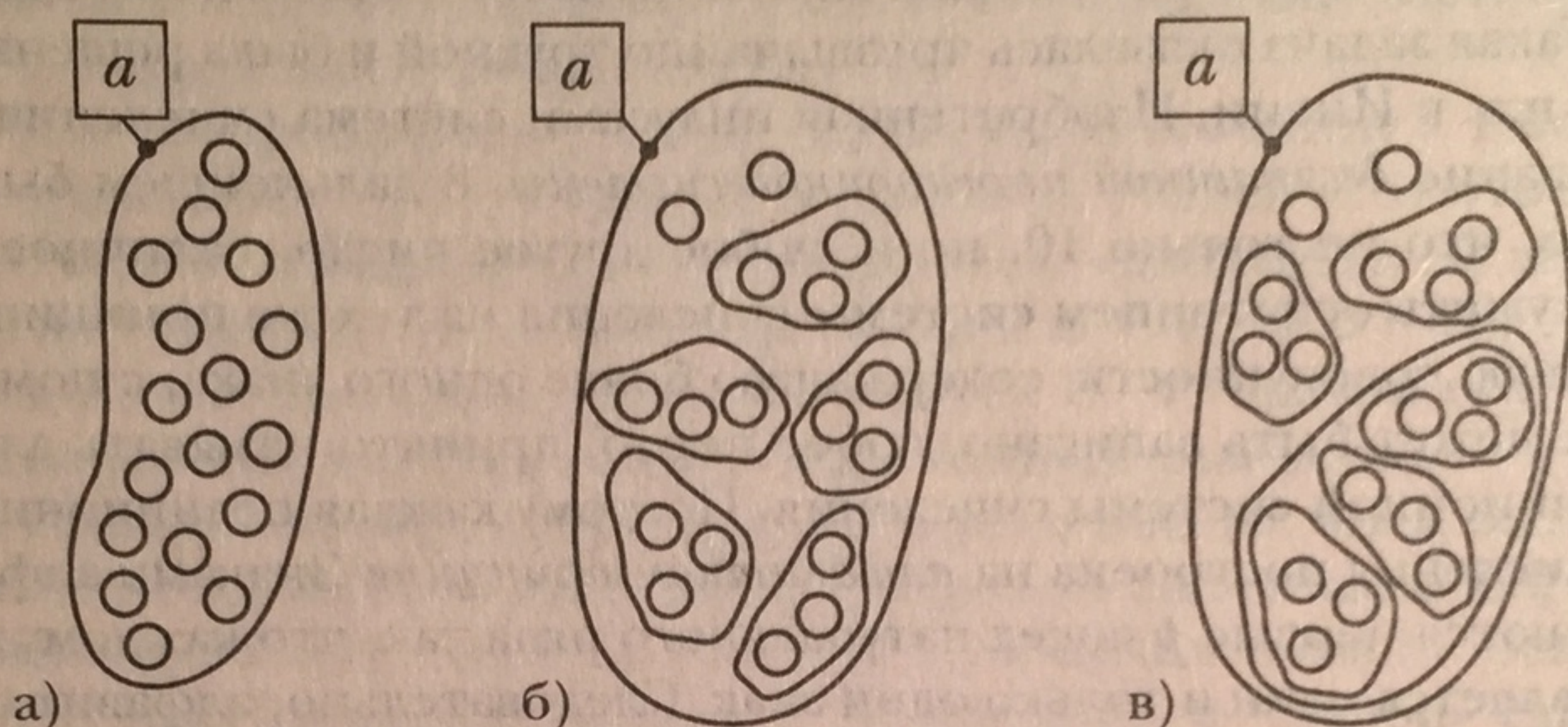


Рис. 108

Так как в троичной системе счисления счет может вестись только до трех, а пересчитываемая совокупность содержит более трех элементов, то строим единицы второго разряда, каждая из которых в 3 раза больше исходной единицы — единицы первого разряда. Так как единиц второго разряда оказалось больше трех, то строим единицы следующего третьего разряда, укрупняя единицу второго разряда также в 3 раза. Единиц третьего разряда оказалось меньше трех, а именно, одна единица. Поэтому получаем, что единиц первого разряда, не составивших ни одной единицы второго, — 2, единиц второго разряда, не составивших ни одной единицы третьего, — 2, единиц третьего разряда — 1. Поэтому число a записывается в виде такой последовательности цифр алфавита $a = 122$. Так как единица второго разряда — это три единицы первого, а единица третьего разряда — это три единицы второго, то

$$122 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2,$$

где 3^2 , 3 и 1 — разрядовые единицы, а 1, 2 и 2 — число единиц в каждом разряде позиционной записи числа a .

Таким образом, при построении позиционной записи числа используются две арифметические операции: умножение и сложение. Поэтому говорят, что позиционная система счисления основывается на *мультипликативно-аддитивном* принципе.

Если теперь вновь обратимся к рисунку 108, б), то увидим, что укрупнение счетной единицы равнозначно делению данного числа a на три, т.е. на основание системы счисления. Результат этого деления, а это деление с остатком, можно записать так: $a = q \cdot 3 + 2$, где $q \geq 3$, поэтому для записи числа q не имеется нужных цифр. Следовательно, процесс деле-

ния требуется продолжить. А именно, делим на три полученное на первом шаге частное. Из рисунка 108, в) видим, что результат деления следует записать так: $q = 1 \cdot 3 + 2$. Подставив это выражение для q в равенство для a , получим

$$a = (1 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 2 = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2.$$

Легко видеть, что одну и ту же операцию деления с остатком мы сначала производим для единиц первого разряда, затем — для единиц второго разряда. Если бы единиц третьего разряда оказалось не меньше трех, то эту операцию следовало бы еще раз повторить и поступать так до тех пор, пока не получим частное, равное нулю. Поэтому говорят, что позиционная система счисления основывается на *принципе итерации*.

Последовательные остатки, получившиеся в процессе деления, образуют числа соответствующих разрядов, которые записываются в определенном порядке, т.е. значение каждой цифры зависит от ее места в записи числа. Поэтому говорят, что имеет место *позиционный принцип записи*.

Рассмотрим еще *пример*. Пусть требуется записать в троичной системе счисления число, изображенное на рисунке 109.

Из рисунка видно, что число состоит из одной единицы второго разряда и одной единицы третьего разряда. Отсутствие единиц первого разряда записывается знаком 0. Поэтому

$a = 110$. Остаток, равный нулю, может получиться на любом шаге деления. Тогда число единиц соответствующего разряда записывается нулем. Например, число, представленное на рисунке 110, следует записать в троичной системе:

$$a = 201, b = 200,$$

или

$$a = 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 1,$$

$$b = 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 + 0.$$

Числа 1, 3, 3^2 , 3^3 , ... являются разрядными единицами в троичной системе счисления. Но знак 3 отсутствует в алфавите системы. Из рисунка 111 легко увидеть, что 3 следует записать как 10 в троичной системе, 3^2 — как 100, 3^3 — как 1000 и т.д. Отсюда следует, что в троичной системе имеют место следующие равенства:

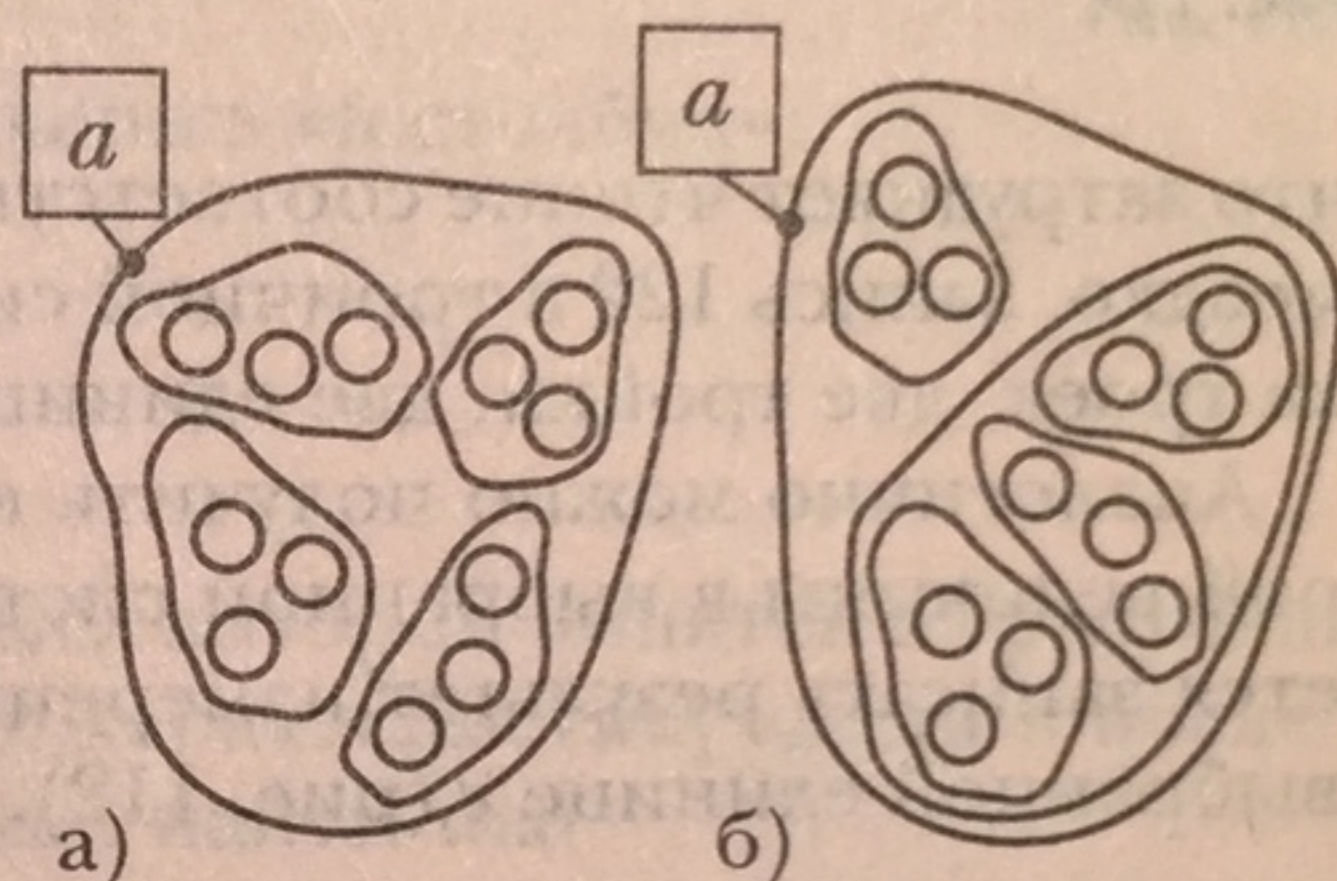


Рис. 109

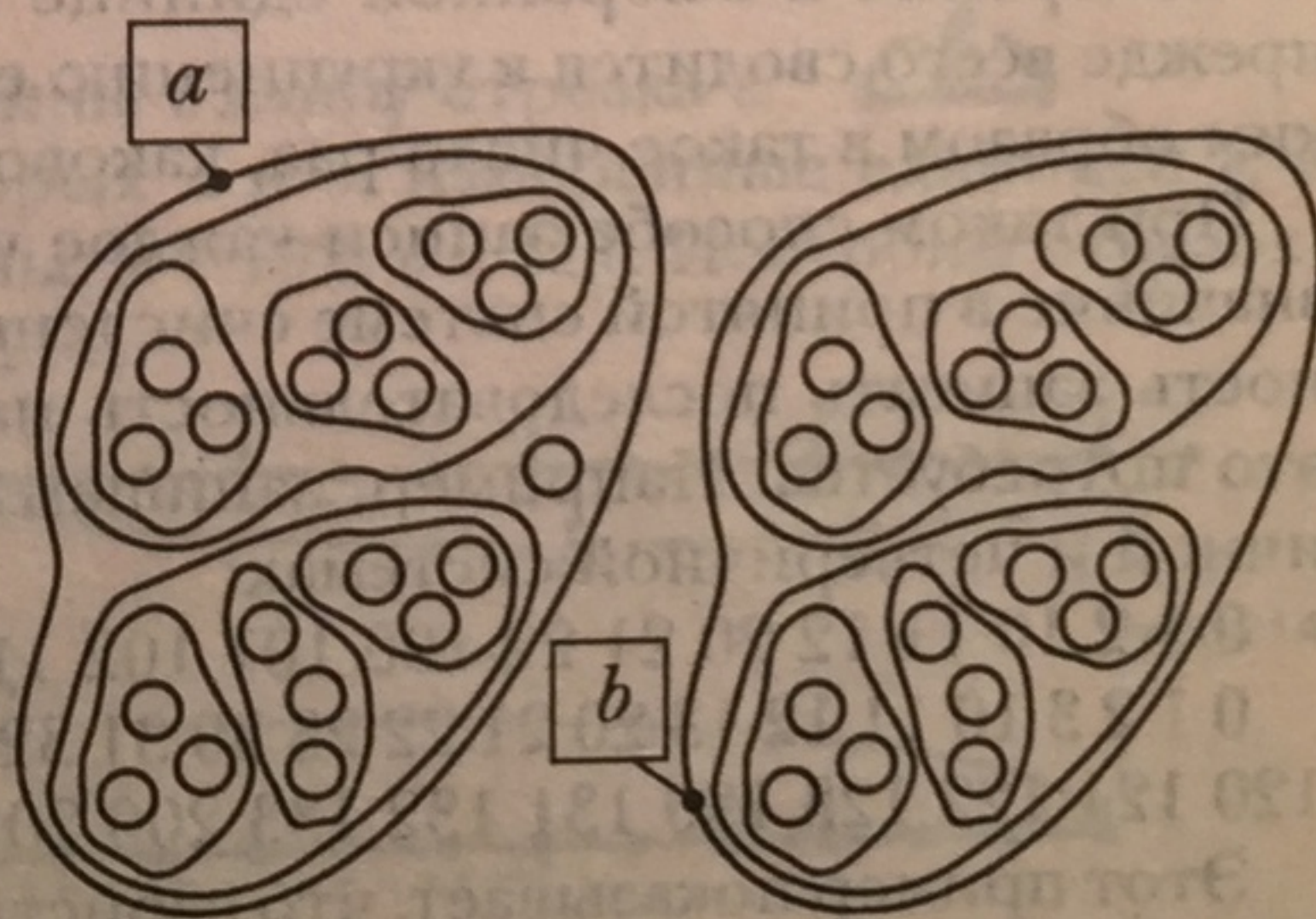


Рис. 110

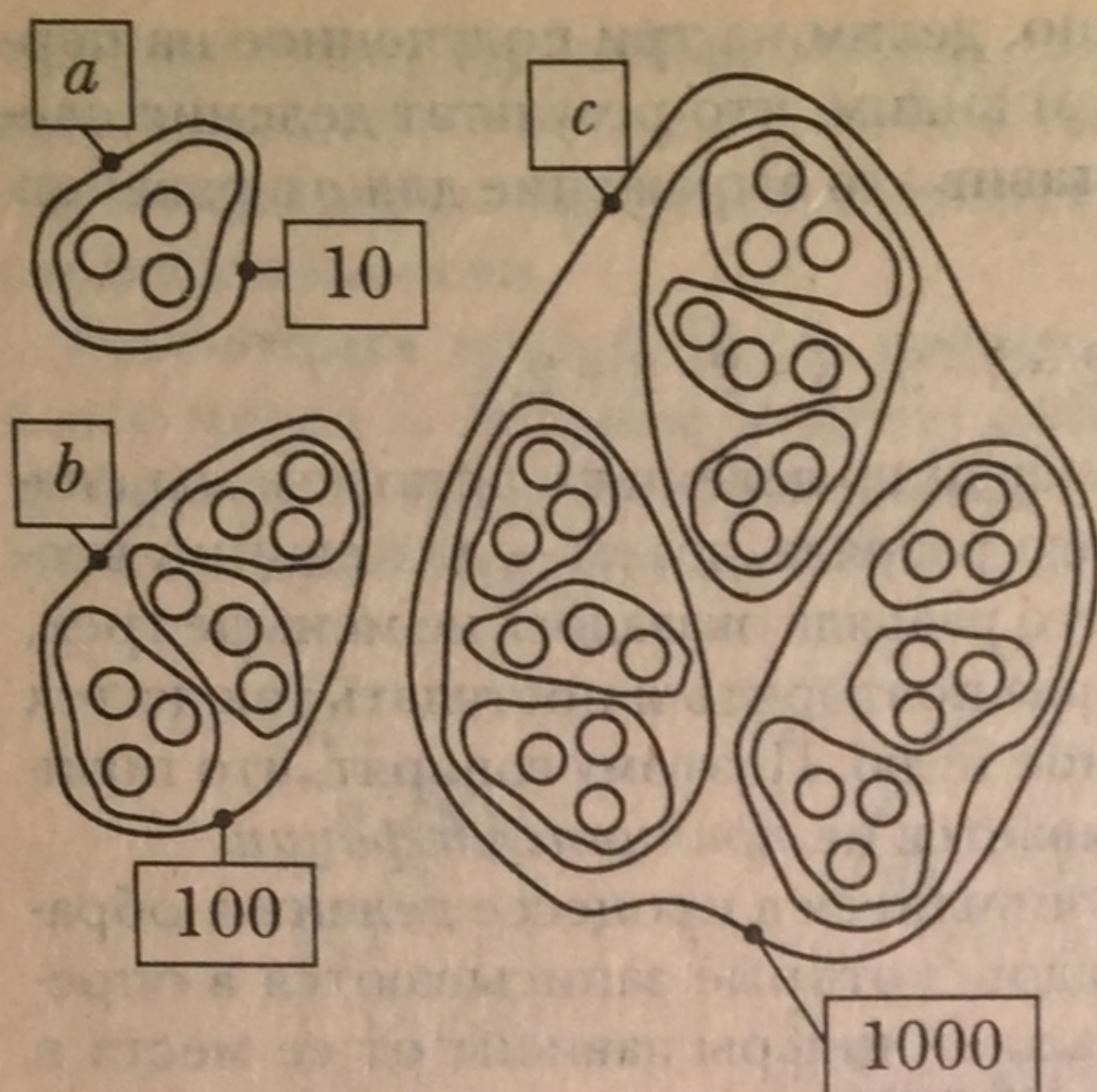


Рис. 111

$$\begin{aligned} 122 &= 1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2; \\ 110 &= 1 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 0; \\ 201 &= 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 1; \\ 200 &= 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 0. \end{aligned}$$

Они не отличаются от привычных записей в десятичной системе. Поэтому, если используются общепринятые цифры для записи числа в системе, отличной от десятичной, необходимо указывать основание системы. Для первых разрядов единиц десятичной системы имеются специальные названия: десять, сто и т.п., для всех иных оснований таких названий нет,

что затрудняет чтение соответствующих записей. Правильно, хотя и громоздко, запись 122 в троичной системе можно прочесть так: одна тройка троек, две тройки, две единицы.

Аналогично можно получить и записать результат измерения некоторой величины в выбранной системе счисления. Например, пусть требуется записать результат измерения длины a в четверичной системе при выбранной единице e (рис. 112).

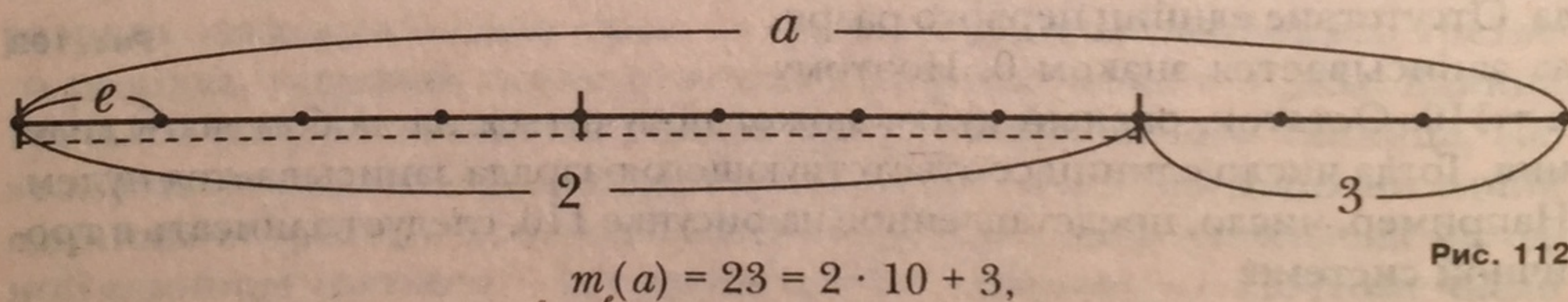


Рис. 112

где 10 есть мера суммы $e \oplus e \oplus e \oplus e$. Значит, процесс записи результата измерения в выбранной единице и выбранной системе счисления прежде всего сводится к укрупнению единицы измерения систематическим образом в такое число раз, каково основание системы счисления.

При таком способе записи каждое число получает единственное обозначение в принятой системе счисления. Следовательно, имеем возможность записать последовательность натуральных чисел так далеко, как это потребуется. Например, запишем отрезки натурального ряда в троичной и четверичной системах:

0 1 2 10 11 12 20 21 22 100 101 102 110 111 112 120 121 122 200...;
0 1 2 3 10 11 12 13 20 21 22 23 30 31 32 33 100 101 102 103 110 111 112 113
120 121 122 123 130 131 132 133 200 201 202 203 210... .

Этот пример показывает, что свойство быть однозначным, двузначным и т.д. числом является следствием выбранной системы счисления, но не свойством самого числа. Так, $101_3 = 22_4$.

В позиционной системе счисления легко производить все арифметические операции. Сначала рассмотрим операцию сложения.

Пусть требуется найти сумму количественных чисел a и b таких, что $a = 102_3$, $b = 111_3$. Нарисуем эти числа (рис. 113) и их сумму.

Легко видеть, что сумма a и b содержит 2 единицы третьего и 2 единицы второго разрядов, но не содержит ни одной единицы первого разряда. Значит,

$$102 + 111 = 220.$$

Принято использовать поразрядную запись «в столбик»:

$$\begin{array}{r} 102 \\ + \\ 111 \\ \hline \end{array}$$

220, смысл которой понятен из рисунка.

Если данные числа рассматривать как характеристику места в последовательности, то требуемую сумму можно найти так:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 & 100 & 101 & \boxed{102} & 110 & 111 & 112 & 120 & 121 & 122 & 200 \\ & & & & & & & & & & & 0 & 1 & 2 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 \\ 201 & 202 & 210 & 211 & 212 & \boxed{220} & 221 & 222 & 1000 & 1001 & \dots \\ 22 & 100 & 101 & 102 & 110 & \boxed{111} & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Если 102 и 111 рассматривать как меры длин a и b соответственно, то сумму $102 + 111$ в троичной системе счисления можно найти следующим образом.

Возьмем в качестве единицы длины e длину отрезка e .

Построим отрезки, длины которых a и b , измеренные единицей e , в троичной системе счисления равны: $a = 102$, $b = 111$. Построим отрезок, длина которого равна $a \oplus b$ (рис. 114).

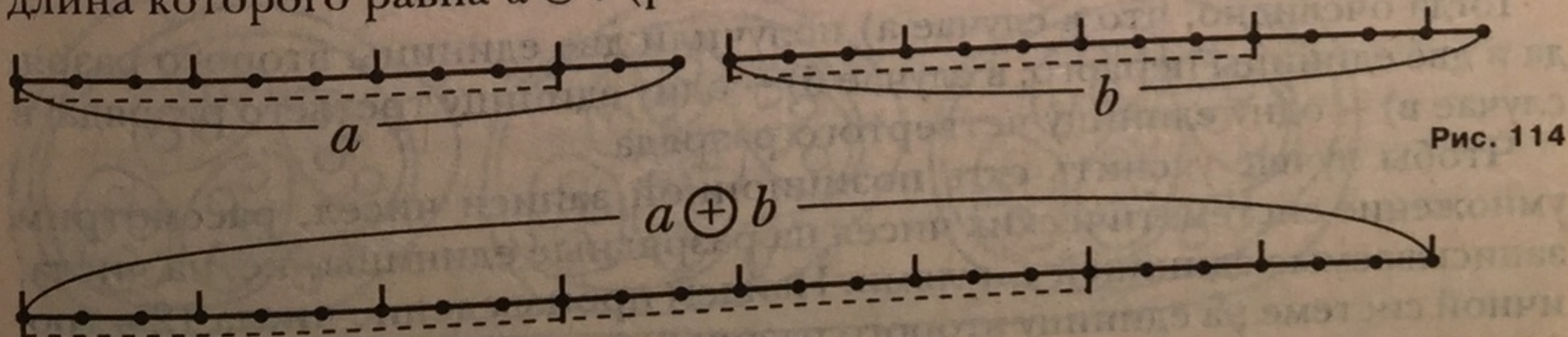


Рис. 114

Измерим длину $a \oplus b$ и запишем результат измерения в троичной системе счисления. Из рисунка 114 видно, что она равна 220.

Таким образом, сумму чисел в позиционной системе счисления можно найти четырьмя разными способами:

- 1) согласно определению суммы количественных чисел и записью найденной суммы в позиционной системе;
- 2) согласно определению суммы чисел, рассматриваемых как характеристики места в последовательности;
- 3) согласно определению суммы чисел, рассматриваемых как меры величин;
- 4) непосредственным оперированием записями чисел в позиционной системе с помощью алгоритма «в столбик».

Можно выделить особые случаи сложения, для которых суммы находятся непосредственно, если опираться на знание нумерации. Их принято называть *нумерационными*. Рассмотрим примеры: $21 + 1$, $22 + 1$, $222 + 1$, где все числа записаны в троичной системе. Легко видеть, что если последовательность троичных чисел нам известна, то для прибавления 1 достаточно взять следующее сразу за первым слагаемым число. Но, в то же время, чтобы такую последовательность построить, надо уметь прибавлять к каждому числу 1. Изобразим все три суммы, как суммы количественных чисел (рис. 115).

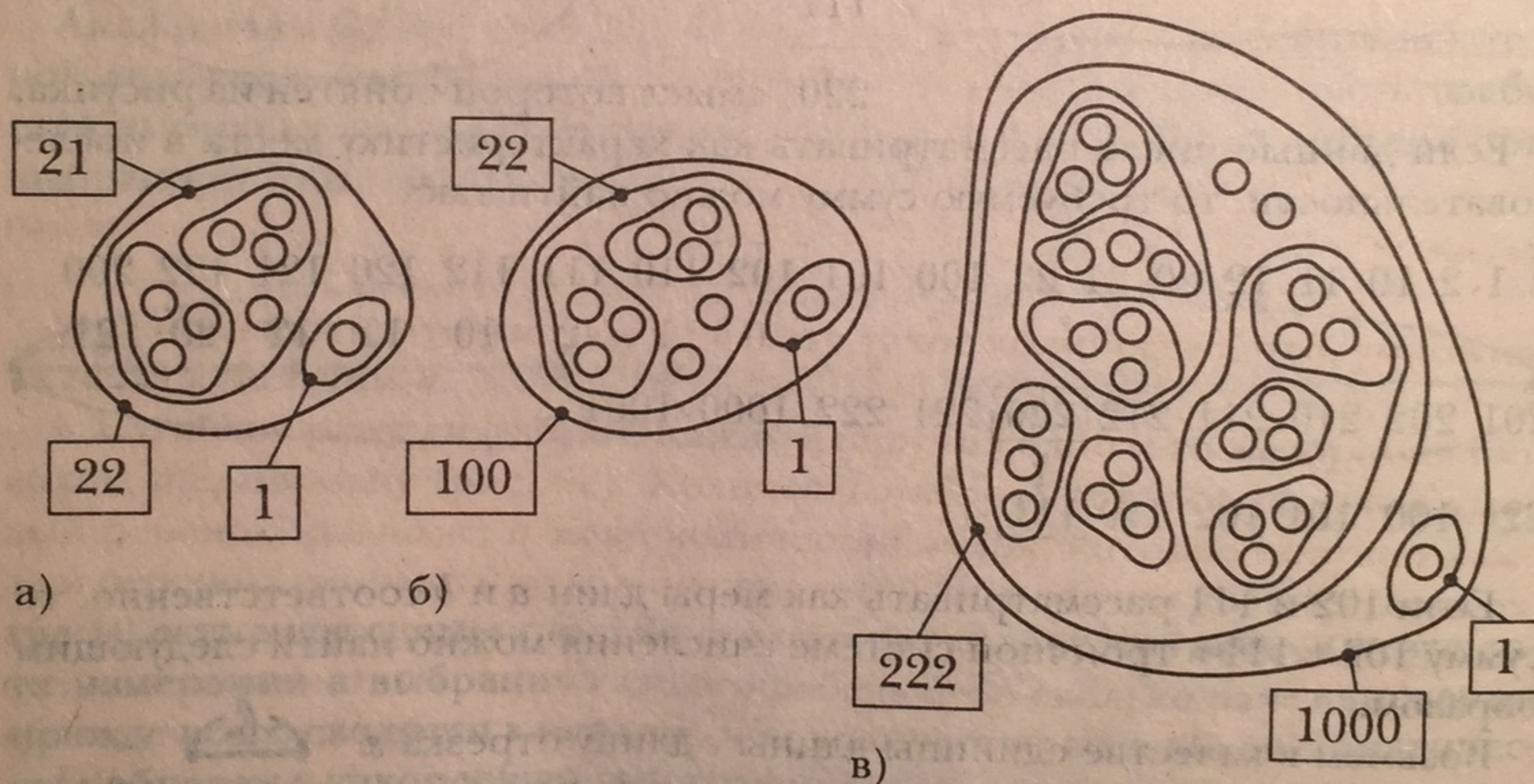


Рис. 115

Тогда очевидно, что в случае а) получили две единицы второго разряда и две единицы первого; в случае б) — одну единицу третьего разряда; в случае в) — одну единицу четвертого разряда.

Чтобы лучше уяснить суть позиционной записи чисел, рассмотрим умножение систематических чисел на разрядные единицы, т.е. на числа, записываемые единицей с нулями. Найдем произведение числа 12 в троичной системе на единицу второго разряда, т.е. на 10. Будем считать, что 12 и 10 — количественные числа. Тогда произведение можно изобразить так, как показано на рисунке 116.

Легко видеть, что каждая разрядовая единица, составляющая число 12, увеличивается в 10 раз и искомое произведение состоит из одной единицы третьего разряда и двух единиц второго. Следовательно, $12 \cdot 10 = 120$. Таким образом, умножение на 10 означает, что каждая разрядная единица укрупняется в 10 раз, т.е. превращается в единицу следующего разряда, тем самым «сдвигает» все цифры в записи числа на один разряд влево, а число единиц в первом разряде становится равным нулю.

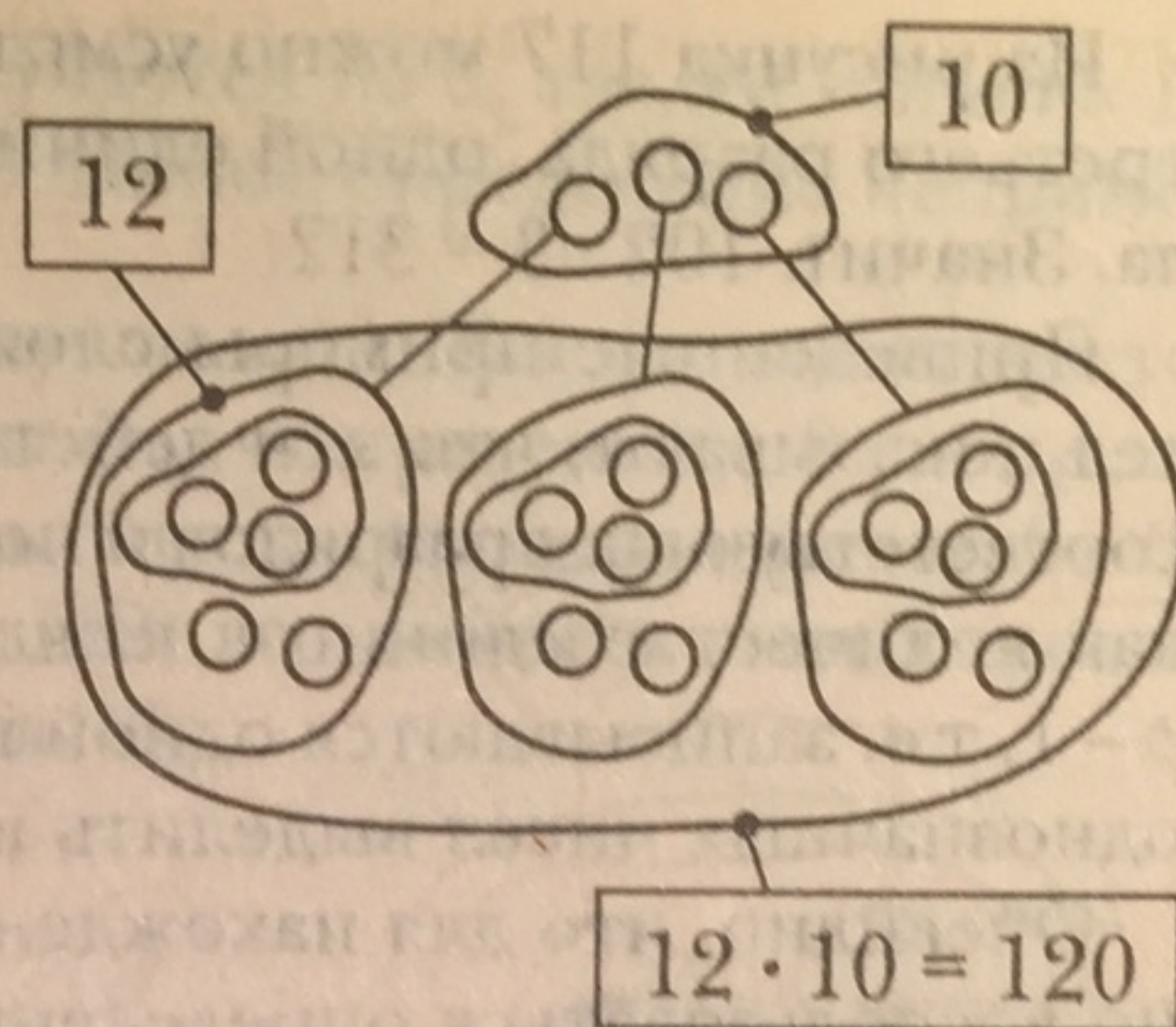


Рис. 116

Отсюда получаем, что умножение на 10 равносильно приписыванию нуля справа, каково бы ни было основание системы счисления. Так как единица третьего разряда есть произведение $10 \cdot 10$, то умножение на 100 равносильно приписыванию к числу справа двух нулей и т.д. Значит, каждое систематическое число можно представить в виде суммы разрядных слагаемых. Например, $234 = 200 + 30 + 4$, где $200 = 2 \cdot 100$, $30 = 3 \cdot 10$. Причем это равенство справедливо независимо от того, каким взято основание системы счисления. В данном случае основание может быть любым, больше четырех. При этом следует помнить, что в зависимости от основания системы числа, одинаково обозначаемые, совершенно различны. Так, если это число взято по основанию 5, то в десятичной системе оно равно 69; если по основанию 6, то в десятичной системе это 94; по основанию 12 — 328.

Представление систематического числа в виде суммы разрядных слагаемых дает возможность легко находить суммы вида $20 + 2$, $100 + 21$ и т.п., следовательно, и разности $22 - 2$, $22 - 20$, $121 - 100$, $121 - 21$ и пр. Аналогично, зная, что $12 \cdot 10 = 120$, легко найти частные $120 : 10$, $120 : 12$ и т.д.

Рассмотрим еще один пример умножения чисел в четверичной системе счисления. Найдем произведение $102 \cdot 3$ как произведение количественных чисел.

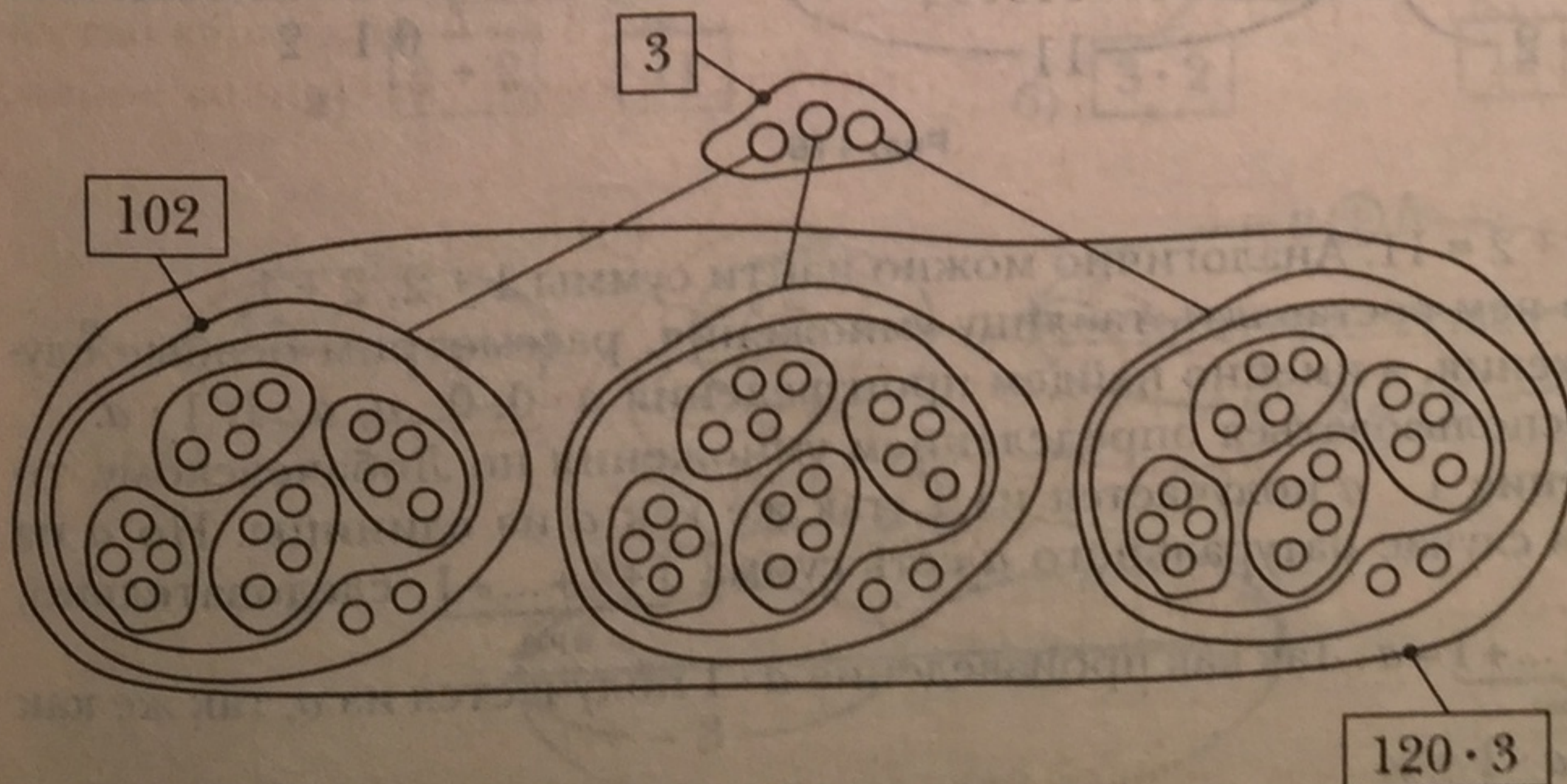


Рис. 117

Из рисунка 117 можно усмотреть, что $102 \cdot 3$ состоит из трех единиц третьего разряда, одной единицы второго и двух единиц первого разряда. Значит, $102 \cdot 3 = 312$.

Приведенные примеры сложения и умножения систематических чисел показывают, что эти действия сводятся к действиям над единицами соответствующих разрядов и последующей записи полученного числа. Так как количество единиц в каждом разряде принимает значения от 0 до $p-1$, т.е. записываются одной цифрой, то удобно суммы и произведения однозначных чисел выделить в таблицы сложения и умножения.

Очевидно, что для нахождения табличных сумм и произведений нужно воспользоваться определением этих операций в какой-нибудь из интерпретаций натуральных чисел. Составим таблицу сложения в троичной системе счисления. Однозначных чисел три: 0, 1, 2. Все возможные их суммы удобно записать в виде таблицы с двумя входами, считая, что первые слагаемые записаны в горизонтальной строке, а вторые — в вертикальном столбце. На пересечении соответствующей строки и столбца записываются суммы (табл. 1).

Так как сумма любого числа с нулем очевидно равна самому числу, то первая строка и столбец сразу заполняются. Покажем, как может быть найдена сумма $2 + 2$ разными способами (рис. 118).

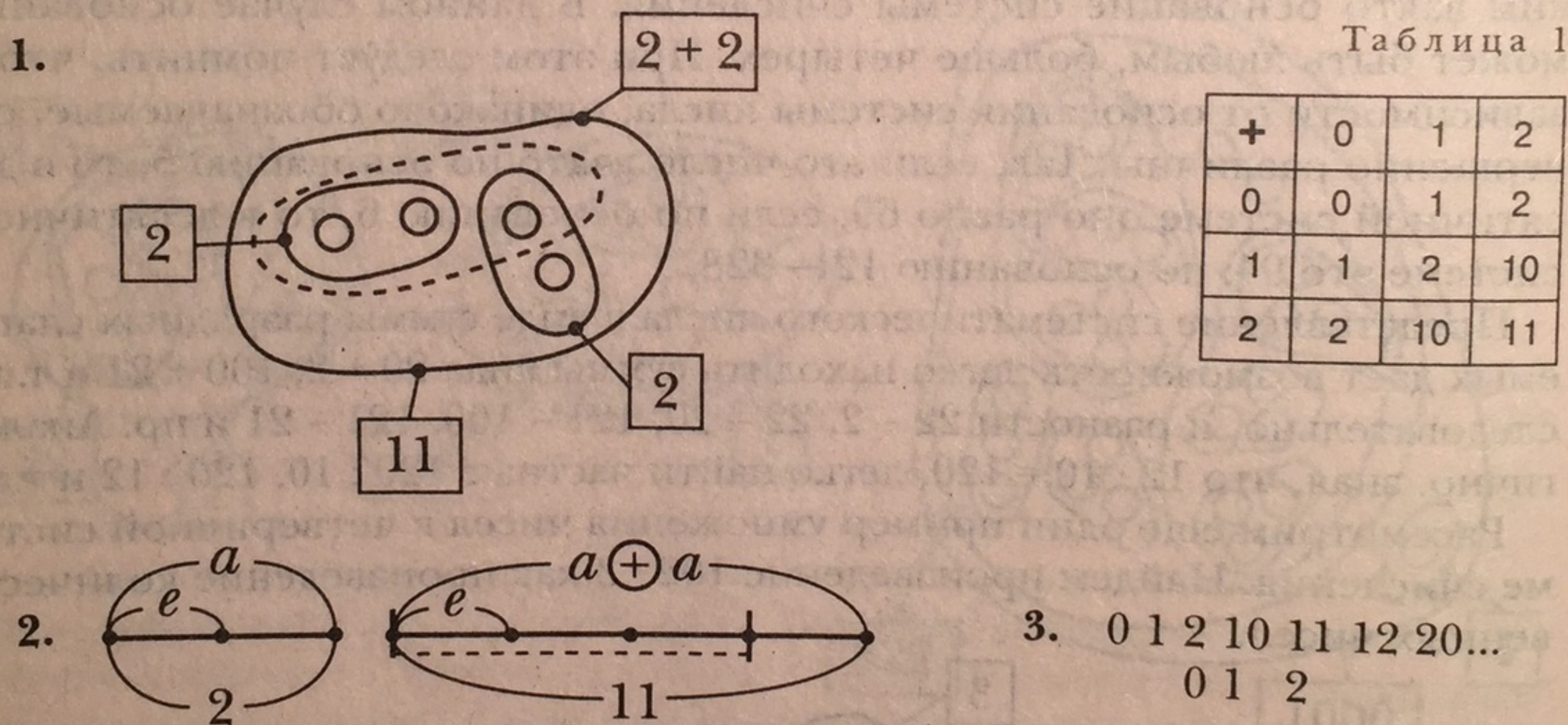


Рис. 118

Итак, $2 + 2 = 11$. Аналогично можно найти суммы $1 + 2$, $2 + 1$.

Прежде чем составлять таблицу умножения, рассмотрим особые случаи умножения, а именно найдем произведения $a \cdot 0$, $0 \cdot a$, $a \cdot 1$, $1 \cdot a$.

Если воспользоваться определением умножения по Лобачевскому, то произведение $1 \cdot a$ получается из 1, так же как a из единицы. Но a из единицы в случае натурального a есть сумма $\underbrace{1+1+\dots+1}_{a \text{ раз}}$, следовательно,

$1 \cdot a = \underbrace{1+1+\dots+1}_{a \text{ раз}} = a$. Так как произведение $a \cdot 1$ получается из a , так же как 1 из 1, то $a \cdot 1 = a$.

Согласно этому определению, $0 \cdot a$ получается из 0, так же как a из 1, поэтому $0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{a \text{ раз}} = 0$. В случае $a \cdot 0$ данное определение неприменимо, так как 0 никак не может быть получен из 1. Так как имеет место равенство $1 \cdot a = a \cdot 1$, то естественно считать, что равенство $0 \cdot a = a \cdot 0$ должно выполняться. Поэтому согласились считать произведение $a \cdot 0 = 0$.

Так как произведение $2 \cdot 2 = 11$ (рис. 119), то таблица умножения в троичной системе счисления такова (табл. 2).

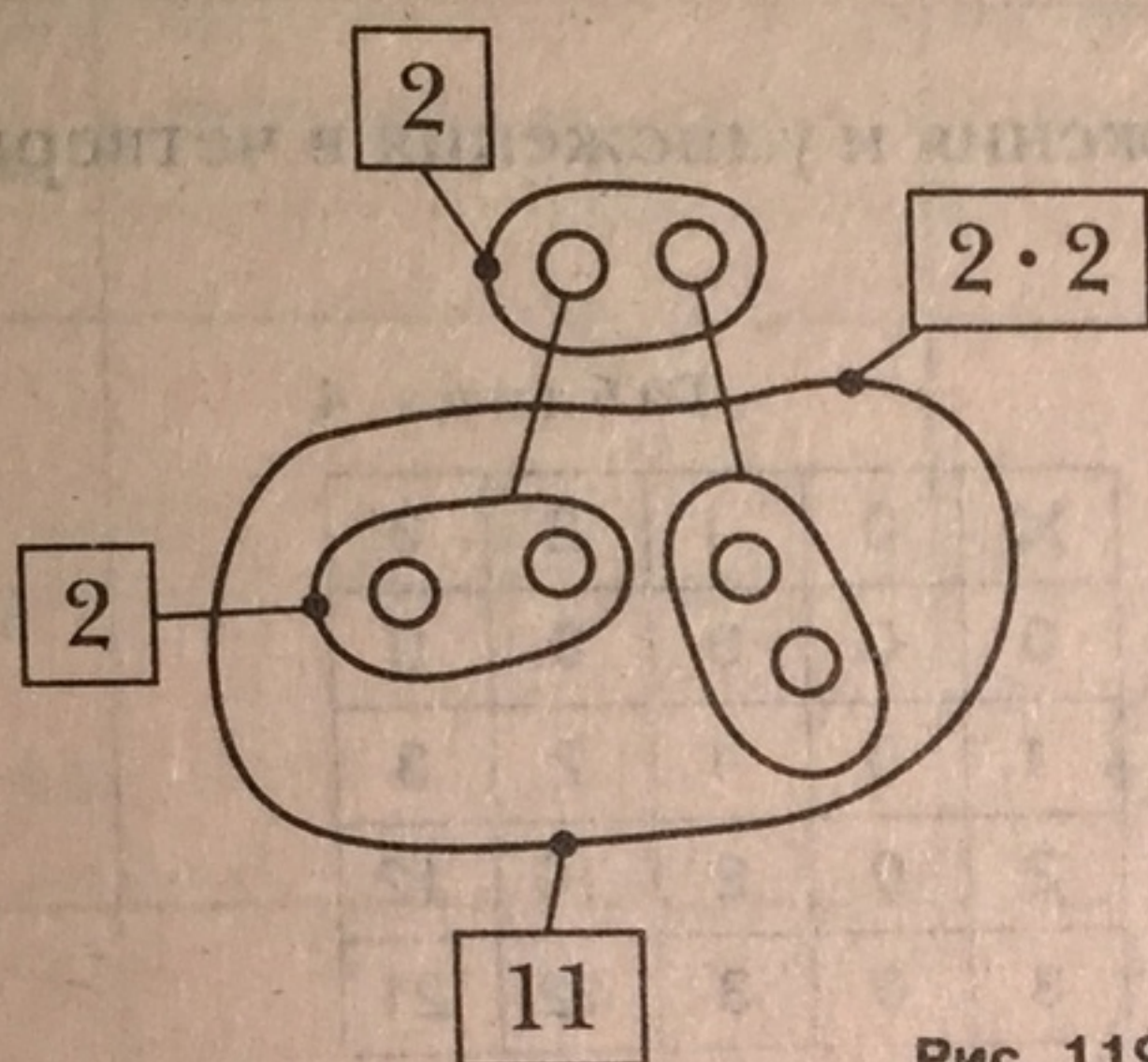


Рис. 119

Таблица 2

\times	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Аналогично могут быть получены таблицы сложения и умножения в четверичной системе. Однозначных чисел в этой системе четыре: 0, 1, 2, 3. Не приводя всех необходимых вычислений, покажем, как могут быть найдены сумма $3 + 2$ и произведение $3 \cdot 2$ различными способами (рис. 120).

1.

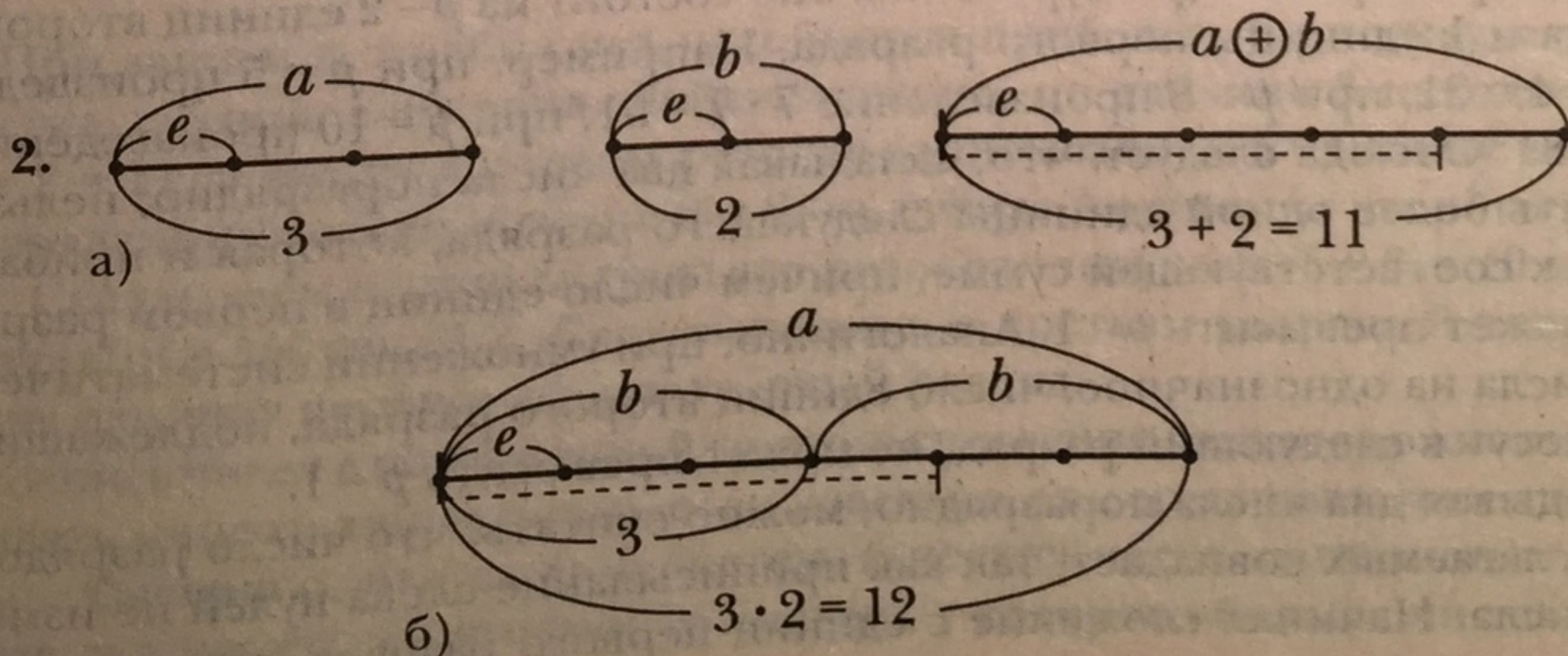
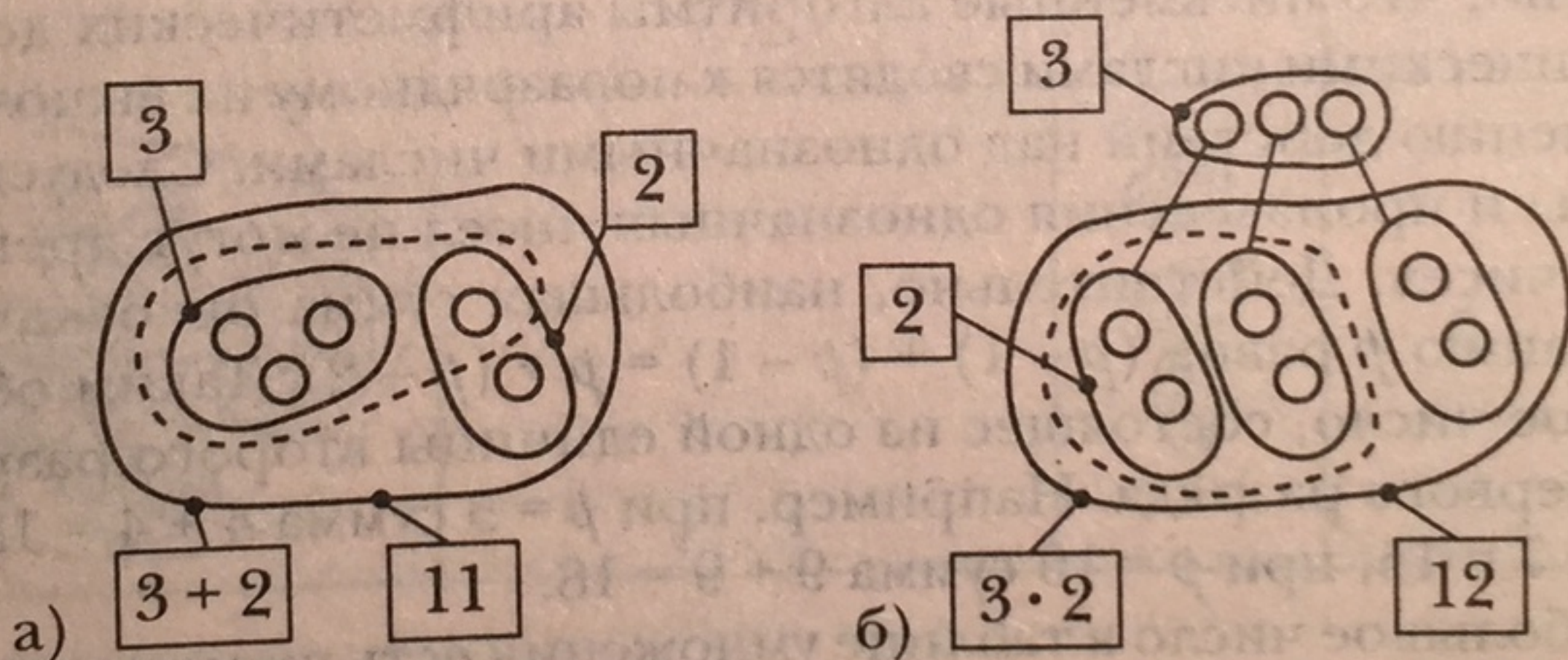


Рис. 120

3. 0 1 2 3 10 11 12 13 20 21 ...

0 1 2

0 1 2 3 10 11 12 13 20 21 22 23 30 31 ...

0 1 2 3

Таким образом, получаем таблицы сложения и умножения в четверичной системе (табл. 3, 4)

Таблица 3

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Таблица 4

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Зная таблицы сложения и умножения, можно найти соответствующие разности и частные в силу того, что операции вычитания и деления являются обратными к сложению и умножению. Например, для четверичной системы счисления разность $11 - 2 = 3$, так как $3 + 2 = 11$, а $12 : 3 = 2$, так как $2 \cdot 3 = 12$. Такие разности и частные также называют *табличными*.

Известно, что письменные алгоритмы арифметических действий над систематическими числами сводятся к поразрядному их выполнению, т.е. к выполнению действий над однозначными числами. Следует отметить, что суммы и произведения однозначных чисел не могут превышать двузначных чисел. Действительно, наибольшая сумма однозначных чисел по основанию p равна $(p-1) + (p-1) = p + (p-2)$. Таким образом, это двузначное число, состоящее из одной единицы второго разряда и $p-2$ единиц первого разряда. Например, при $p=5$ сумма $4 + 4 = 13$, при $p=8$ сумма $7 + 7 = 15$, при $p=10$ сумма $9 + 9 = 18$.

Самое большое число в таблице умножения есть произведение $(p-1) \times (p-1) = p^2 - 2p + 1 = (p-2)p + 1$, т.е. оно состоит из $p-2$ единиц второго разряда и 1 единицы первого разряда. Например, при $p=5$ произведение $4 \cdot 4 = 21$, при $p=8$ произведение $7 \cdot 7 = 51$, при $p=10$ произведение $9 \cdot 9 = 81$. Отсюда следует, что, складывая два числа поразрядно, нельзя получить более одной единицы следующего разряда, которая и прибавляется к соответствующей сумме, причем число единиц в первом разряде не может превысить $p-1$. Аналогично, при умножении систематического числа на однозначное, число единиц второго разряда, подлежащих «переносу» в следующий разряд, не может превысить $p-1$.

Складывая два числа поразрядно, можно считать, что число разрядов обоих слагаемых совпадает, так как приписывание слева нулей не изменяет числа. Начиная сложение с единиц первого разряда, продолжаем

поразрядное сложение до тех пор, пока не исчерпаем все разряды в записи слагаемых. Обычно такое сложение записывают «в столбик». Если оказывается, что сумма единиц последнего разряда превышает однозначное число, то в результате сложения получаем число, которое имеет на один разряд больше, чем каждое из слагаемых. Процесс поразрядного сложения двух систематических чисел наглядно показан на рисунке 121.

$p = 4$	IV разряд	III разряд	II разряд	I разряд	Запись
a					103
b					322
$a + b$					
$a + b$					1031

Рис. 121

При записи в столбик нет надобности прибегать к рисунку, если известна таблица сложения. Действительно, по таблице 3 находим, что $3 + 2 = 11$, поэтому в первом разряде записываем 1, а единицу второго разряда прибавляем к сумме $0 + 2$, получаем 3 единицы второго разряда. Складываем единицы третьего разряда, получаем $1 + 3 = 10$ в соответствии с таблицей 3. Следовательно, в третьем разряде 0 единиц, а одну единицу переносим в четвертый разряд.

Запись чисел в позиционной системе счисления дает возможность сравнивать многозначные числа, если известно, как сравниваются однозначные. Очевидно, что из двух систематических чисел, записанных по одному и тому же основанию, то больше, у которого больше число разря-

дов. Если число разрядов совпадает, то из двух чисел больше то, у которого больше единиц в первом из просматриваемых слева направо разрядов, а число единиц во всех предшествующих разрядах совпадает. Например, в четверичной системе 100 003 больше, чем 33 332, а 3 321 больше, чем 3 311.

Если одно из чисел больше другого, то существует разность, которую можно найти, вычитая из большего числа меньшее. Эту разность можно найти поразрядно, воспользовавшись таблицей сложения. Например, разность 301 – 122 существует. Процесс поразрядного вычитания систематических чисел наглядно можно пояснить следующим рисунком. Так как разность 301 – 122 – это такое число, которое следует прибавить к 122, чтобы получить 301, то имеем (рис. 122).

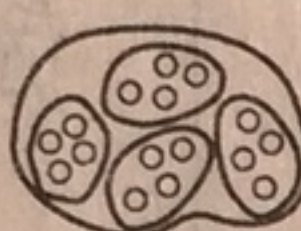
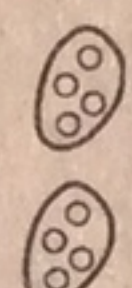

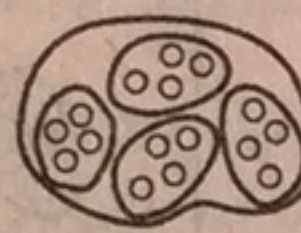

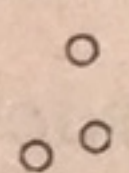
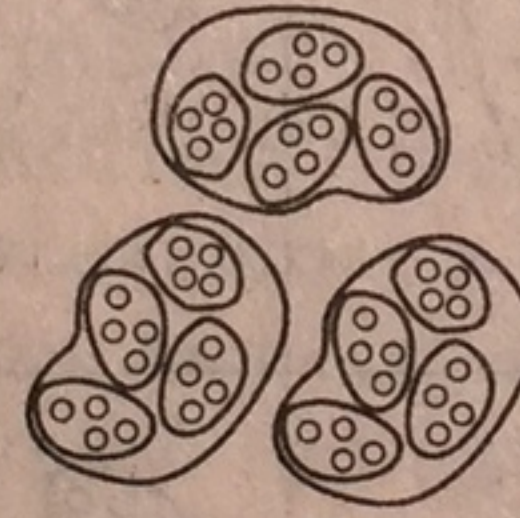

$p = 4$	III разряд	II разряд	I разряд	Запись
b				122
$a - b$				+ 113
$a = b + (a - b)$				301

Рис. 122

Разность 301 – 122 находим следующим рассуждением. Чтобы получить единицу в первом разряде, надо к 2 прибавить такое число, которое в сумме с двойкой даст двузначное число, оканчивающееся на единицу. Это число 3, так как $2 + 3 = 11$. К двум единицам второго разряда нужно прибавить такое число, которое в сумме с двойкой даст двузначное число, оканчивающееся нулем. Это число 2, так как $2 + 2 = 10$, но у нас имеется еще одна единица второго разряда, поэтому прибавляем только одну единицу второго разряда, аналогично получаем одну единицу в третьем разряде. Значит, чтобы получить 301 надо к 122 прибавить 113. При записи вычитания поразрядно «в столбик» рассуждаем так.

Из одной единицы первого разряда нельзя вычесть 2, поэтому занимаем одну единицу второго разряда, тогда в первом разряде имеем 11 единиц. По таблице сложения находим, что $11 - 2 = 3$. Во втором разряде нет ни одной единицы, поэтому занимаем одну единицу третьего разряда. Это 10 единиц второго разряда, но одну из них мы уже заняли, поэтому во втором разряде осталось 3 единицы. Вычитаем из трех 2, получа-

ем 1. В третьем разряде осталось 3 единицы. Вычитаем из двух 1, получаем 1. Следовательно, разность $301 - 122 = 113$.

Умножение систематических чисел на однозначное число покажем на примере умножения 102 на 2 в троичной системе счисления (рис. 123).

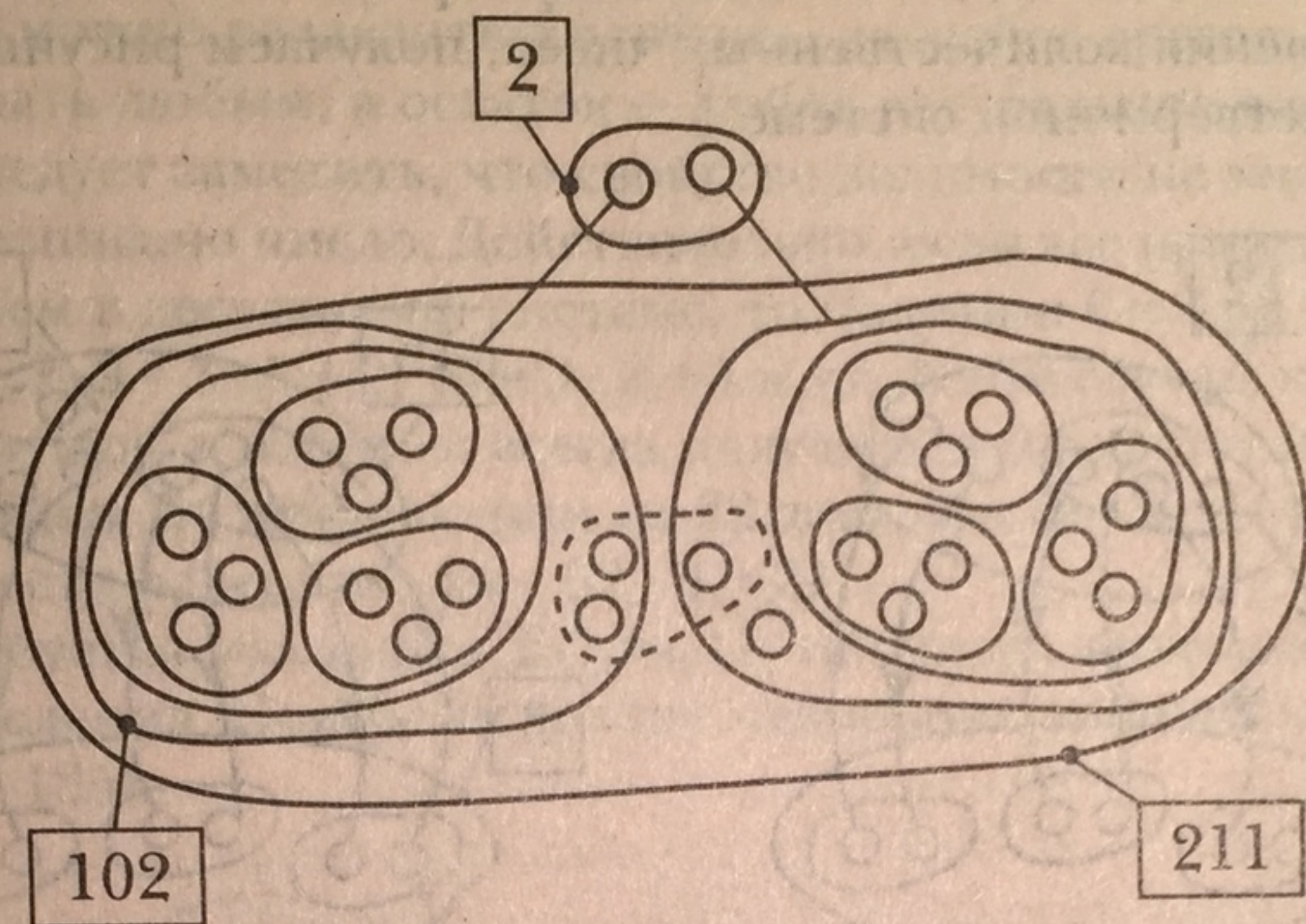


Рис. 123

Или, записывая «в столбик», получаем

$$\begin{array}{r} \times 102 \\ 2 \\ \hline \end{array}$$

211, так как $2 \cdot 2 = 11$, а $1 \cdot 2 = 2$.

Если требуется умножить 102 на 20, то процесс умножения остается прежним, с той только разницей, что получаем единицы второго разряда. Значит, $102 \cdot 20 = 2110$. Тогда, складывая полученные результаты, легко найти произведение 102 на 22. Сокращенно «в столбик» это записывается так:

$$\begin{array}{r} \times 102 \\ 22 \\ \hline 211 \\ 2110 \\ \hline 10021. \end{array}$$

В такой записи 0 в числе 2110 обычно опускают, записывая результат умножения на единицы второго разряда сразу под единицами этого разряда.

Нам остается рассмотреть операцию деления для систематических чисел. До сих пор мы говорили о делении как операции, обратной умножению. Легко видеть, что деление на множестве натуральных чисел является частичной операцией, так как не для любых двух натуральных a и b можно найти такое c , что $c \cdot b = a$. Действительно, требуемое c должно находиться в ряду $0 \cdot b, 1 \cdot b, 2 \cdot b, 3 \cdot b, \dots$. Ясно, отнюдь не обязательно в этом ряду окажется число c . В то же время для любых двух натуральных чисел a и b , $b \neq 0$ существуют и единственные натуральные q и r такие, что имеет место равенство $a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$. В этом случае говорят

о делении a на b с остатком, при этом q есть неполное частное, а r — остаток. Деление с остатком служит основой алгоритма деления систематических чисел.

Поясним суть деления с остатком на примере. Пусть требуется разделить $12 : 3$, $13 : 3$, $20 : 3$, $21 : 3$. Используя графическую интерпретацию операции деления количественных чисел, получаем рисунок 124. Числа записаны в четверичной системе.

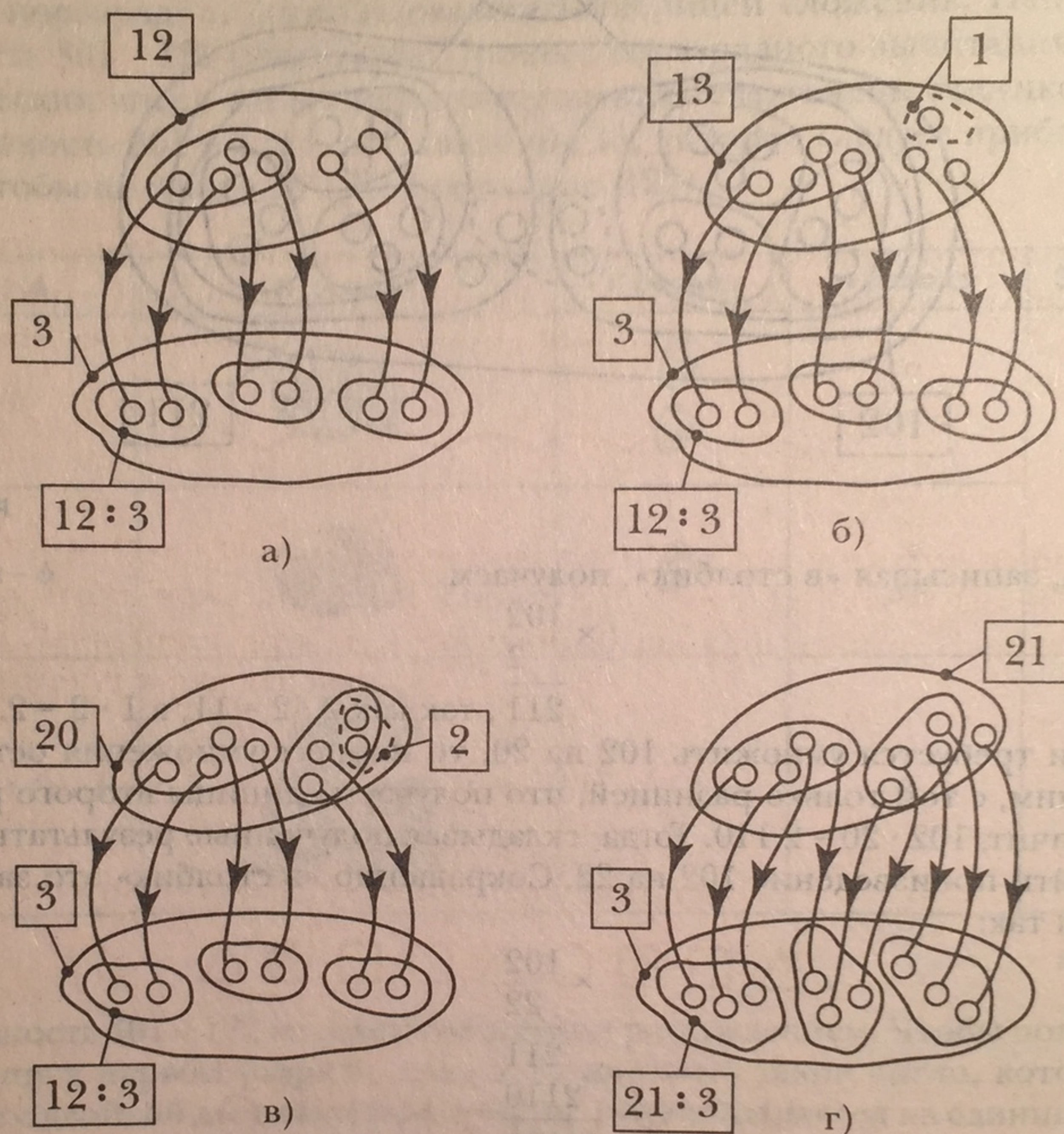


Рис. 124

Из этого рисунка видно, что число 12 делится на 3 и в частном получается 2. При делении на 3 числа, следующего за 12, т.е. числа 13, деление «не выходит», одна единица остается лишней. В то же время само число 13 можно записать в виде $13 = 3 \cdot 2 + 1$. В этом случае говорят, что 13 разделили на 3 с остатком, причем 2 — частное, а 1 — остаток. Если взять число, непосредственно следующее за 13, то по-прежнему делится на 3 только 12, но 2 меньше трех, и, следовательно, образуется остаток, равный 2. Это число можно записать в виде $20 = 3 \cdot 2 + 2$. Взяв следующее число 21, видим, что оно делится на 3 без остатка и записывается так: $21 = 3 \cdot 3 + 0$. Легко видеть, что 22 при делении на 3 вновь будет давать остаток, равный 1, 23 — остаток 2, а число 24 делится на 3 без остатка.

Этот пример показывает, что при делении на 3 остаток не может превышать 2. Если считать, что при делении на 3 любое число можно записать в виде $a = 3 \cdot q + r$, то все возможные остатки образуют числа: 0, 1, 2. Пусть требуется число 2 разделить на 3. Ясно, что в этом случае частное равно 0, а остаток — 2, так как 2 можно записать $2 = 3 \cdot 0 + 2$. Значит, любое число можно разделить с остатком на любое другое, причем частное может быть любым, а остаток — любое натуральное число, меньшее делителя. Следует заметить, что свойство делимости не зависит от того, как именно записано число. Действительно, если все приведенные выше числа запишем в десятичной системе, то получим: $6 = 3 \cdot 2 + 0$, $7 = 3 \cdot 2 + 1$, $8 = 3 \cdot 2 + 2$, $9 = 3 \cdot 3 + 0$, $10 = 3 \cdot 3 + 1$ и т.д. В том случае, когда делимое меньше делителя, в частном всегда получается 0, а остаток равен делимому. Например, 24 при делении на 32 дает частное 0, а остаток 24, так как имеет место равенство $24 = 32 \cdot 0 + 24$.

Пусть требуется разделить 202 на 11, где числа записаны в троичной системе счисления. Построим соответствующую графическую интерпретацию (рис. 125).

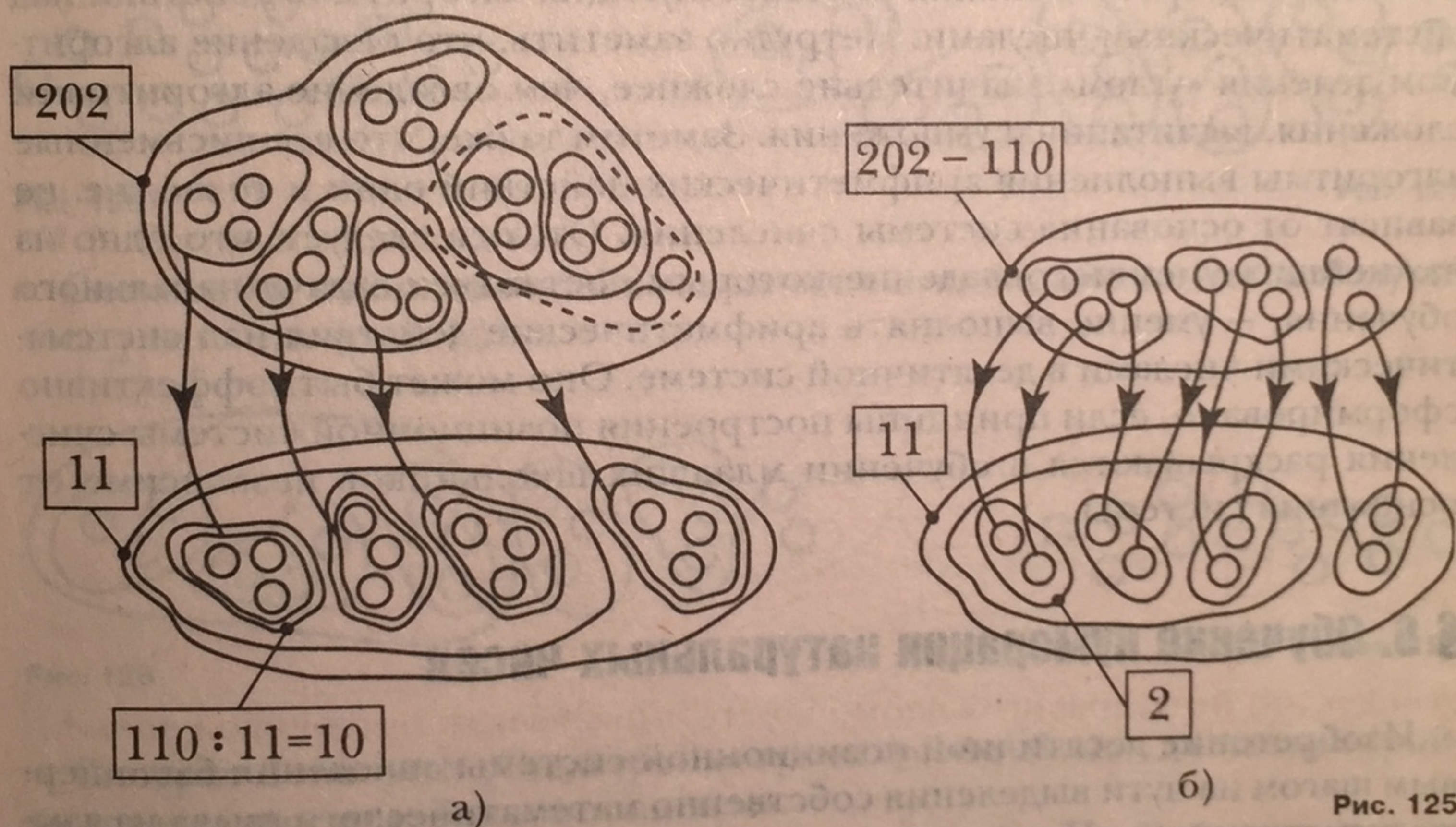


Рис. 125

Этот рисунок показывает, что деление систематических чисел естественно производить поэтапно. Сначала делятся единицы высшего разряда. В данном примере это единицы третьего разряда. Так как их число 2, а делитель 11, то в частном получается 0, а остаток 2. Нуль меньше, чем делитель 11, то в частном получается 0, а остаток 2. Единиц высшего разряда обычно не записывается, поэтому в частном при делении 202 на 11 высшим разрядом может быть только второй. Единиц второго разряда в делимом 20. При делении 20 на 11 (рис. 124, а) получаем 10, а в остатке 2, так как $20 = 11 \cdot 10 + 2$. Две единицы второго разряда и две единицы первого остались неразделенными, поэтому следующий шаг деления 202 на 11 состоит в делении на 11 числа $202 - 110$. Это число, как показывает рисунок, равно 22. Оно делится на 11 без остатка и

равно 2. Следовательно, в частном от деления 202 на 11 получаем одну единицу второго разряда (10) и две единицы первого. Таким образом, $202 : 11 = 12$. Легко видеть, что имеет место равенство $202 = 11 \cdot 12$. Принято процесс такого деления записывать в виде деления «углом»

$$\begin{array}{r|l} 202 & 11 \\ -11 & 12 \\ \hline 22 & \\ -22 & \\ \hline \end{array}$$

В таком алгоритме используются операции деления, умножения и вычитания. Для его успешного применения требуется, во-первых, умение делить такие систематические числа, когда делимое имеет столько же или на единицу больше разрядов, чем делитель. Оно опирается на смысл частного как числа, на которое нужно умножить делитель, чтобы получить делимое, т.е. на смысл операции деления, обратной умножению. Такой способ деления в методике принято называть методом подбора. Во-вторых, умение делить с остатком. Выполнение операций умножения и вычитания требует знания соответствующих алгоритмов действий над систематическими числами. Нетрудно заметить, что овладение алгоритмом деления «углом» значительно сложнее, чем овладение алгоритмами сложения, вычитания и умножения. Заметим также, что все письменные алгоритмы выполнения арифметических действий одни и те же, т.е. не зависят от основания системы счисления. Отсюда следует, что одно из важнейших умений, овладение которым составляет задачу начального обучения, — умение выполнять арифметические действия над систематическими числами в десятичной системе. Оно может быть эффективно сформировано, если принципы построения позиционной системы счисления раскрываются в обучении младших школьников независимо от основания системы.

§ 6. Обучение нумерации натуральных чисел

Изобретение десятичной позиционной системы счисления было первым шагом на пути выделения собственно математического языка из языка естественного. Поэтому изучение нумерации младшими школьниками является необходимым и существенным этапом овладения языком математики. Оно не должно сводиться только к умению владеть техническими приемами чтения и записи чисел и усвоению алгоритмов действий над систематическими числами. Так как техника оперирования формальными символами языка, являясь самодостаточной, скрывает содержательный аспект обозначаемых понятий, то задача обучения состоит в том, чтобы раскрыть для учащихся суть символической записи числа так, чтобы в формируемых представлениях, умениях и навыках обозначаемое и обозначающее были легко отделяемы. Здесь показаны возможные способы организации их познавательной деятельности, направленные на достижение указанной цели.

Пример 1

1.1. Шел солдат со службы и попал в дремучий заколдованный лес. Видит, Баба-яга стоит.

— Здравствуй, бабушка!

— Здорово, служивый. Заплутал небось! Из моего леса не выберешься. А пособишь мне, укажу дорогу. Кощеюшка-то Бессмертный требует прописать, сколько у меня гусей-лебедей на службе. А я, старая, грамоте не учёна.

— Ох, бабушка, я больше с врагами сражаться умею.

А сам про себя думает: «Где это видано, чтоб солдат сдавался! Писать худо-бедно умею и до трех ловко считаю».

— Где, бабушка, твои гуси-лебеди?

— Вон, по травушке гуляют.

Взял солдат бересту да палочку острую и так нарисовал гусей-лебедей (рис. 126).

Далее стал считать: один, два, три. Чтобы не забыть, каких сосчитал, солдат отмечал их. Считает да и отмечает. И получилось (рис. 127):

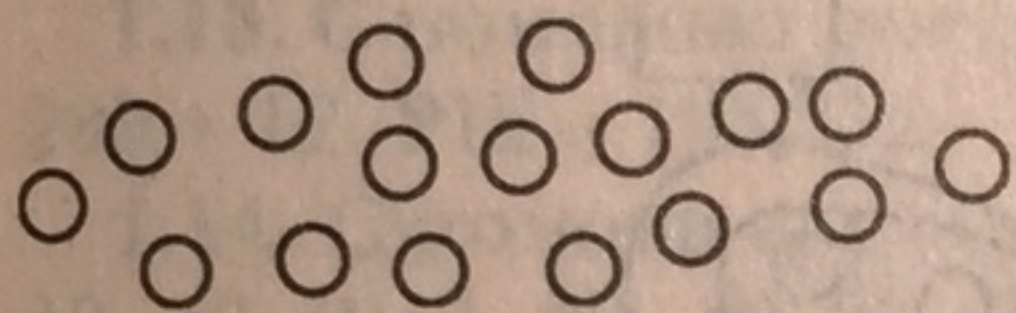


Рис. 126

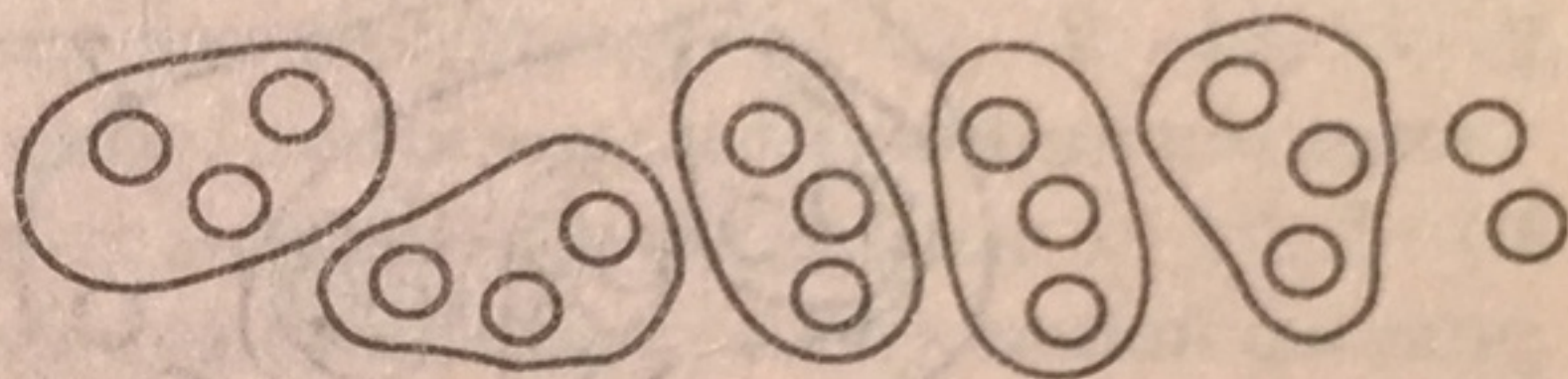


Рис. 127

Сколько же таких троек? Вновь начал считать да отмечать и получилось у него так (рис. 128):

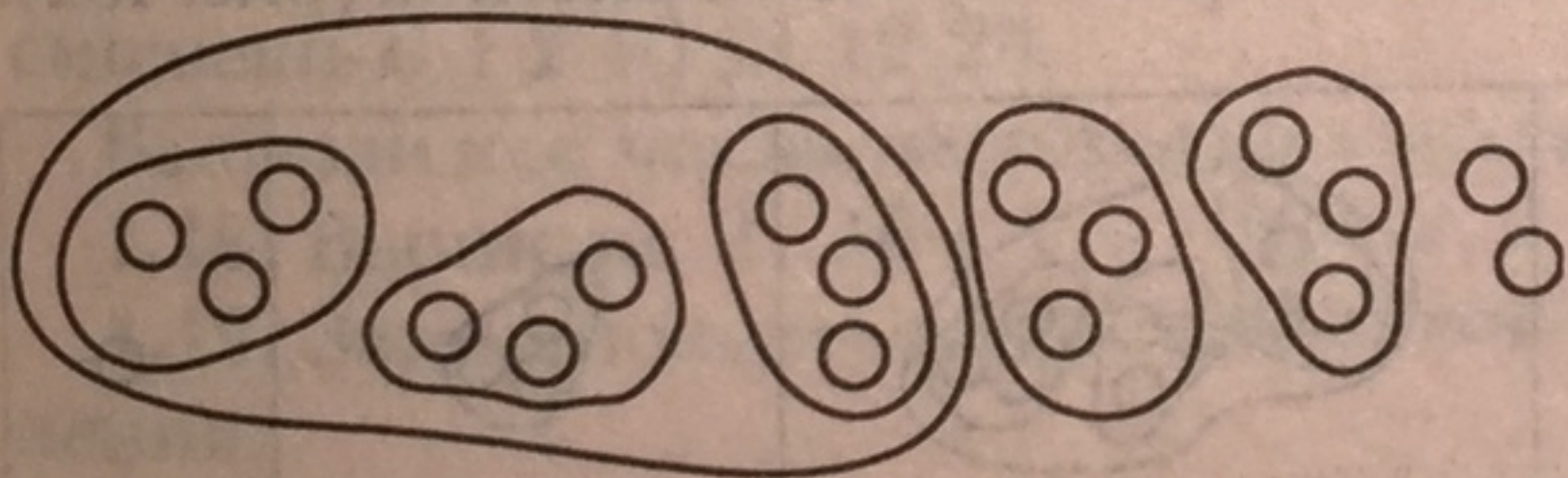


Рис. 128

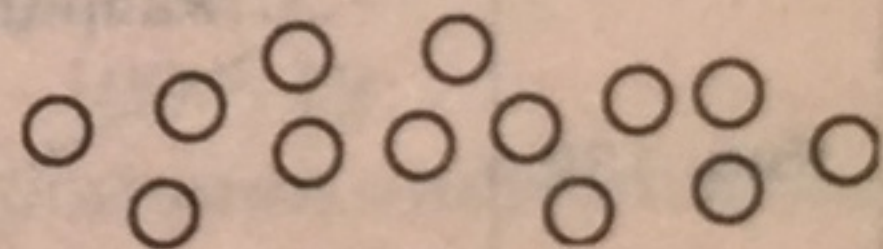


Рис. 129

Смотрит и говорит: «Одна тройка троек гусей-лебедей, да еще две тройки, да еще два гуся. Так и пропишем».

Тут и Змей Горыныч за грамотой пожаловал. Отдала Баба-яга ему солдатovu грамоту, а солдату дала клубочек:

— Ступай, служивый, за ним.

И привел клубочек солдата прямо к родному дому.

1.2. Незнайке очень понравился способ счета солдата из сказки. Решил он так же посчитать свои марки. Сначала нарисовал их (рис. 129).

А как дальше быть, не знает. Помогите Незнайке.

1.3. Знайка тоже считал свои марки. У него получилось: две тройки троек да еще одна тройка, да еще две марки. Нарисуй марки Знайки.

Посмотрел Знайка на свою запись, уж очень длинная! И сократил запись так: 2 1 2. «Но надо указать, что я считал тройками», — подумал Знайка и записал: 212 (3).

1.4. В ящиках у доктора Пилюлькина лежат таблетки от разных недугов. Он сосчитал и записал их количество способом Знайки (рис. 130).

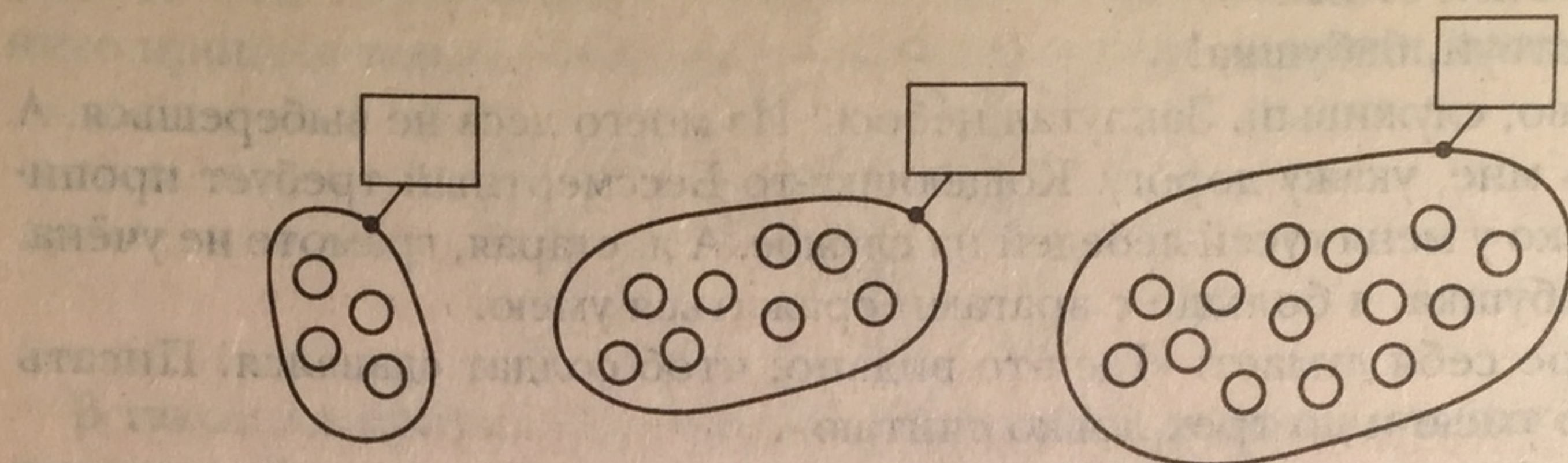


Рис. 130

Напиши в «окошках», что у него получилось.

А на этих двух ящиках Пилюлькин написал 12(3) и 1(3) (рис. 131). И засомневался.

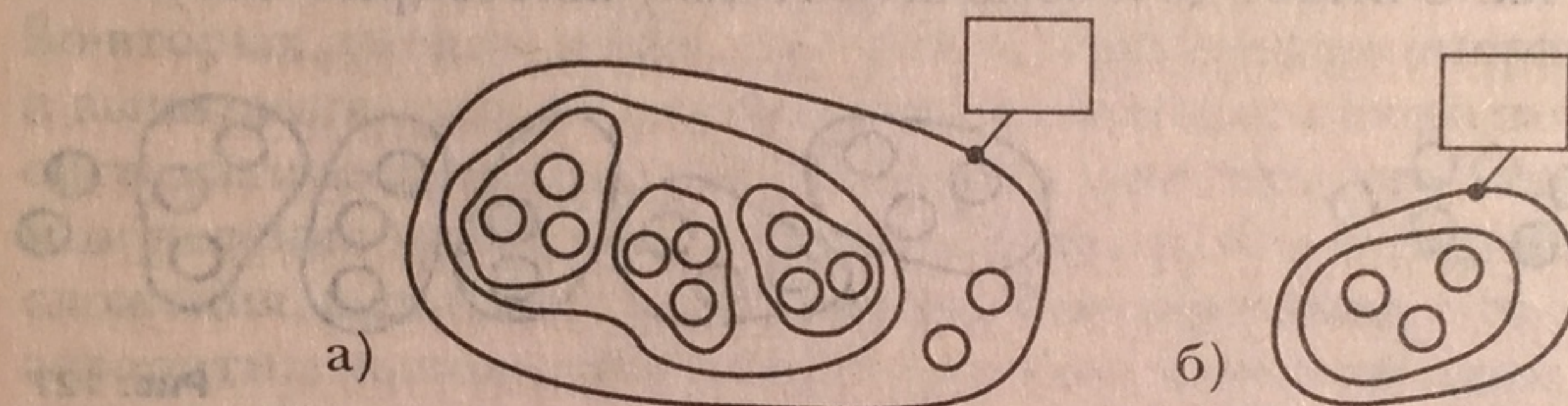


Рис. 131

Как ты думаешь, почему он засомневался?

1.5. Чтобы помочь Пилюлькину, Знайка нарисовал такой рисунок (рис. 132).

Рис. 132	Разрядная единица			
	Количество			
а)		1		2
б)			1	

Рис. 132

Как можно записать количество таблеток у Пилюлькина, если записывать в строчку и без таблицы? Какой знак надо использовать? Что такой знак показывает? Запиши числа для Пилюлькина.

1.6. Продолжи последовательность так далеко, как сможешь. Запиши нужные числа, если кружочки считать так, как считал солдат из сказки, а числа записывать так, как записывал Знайка.

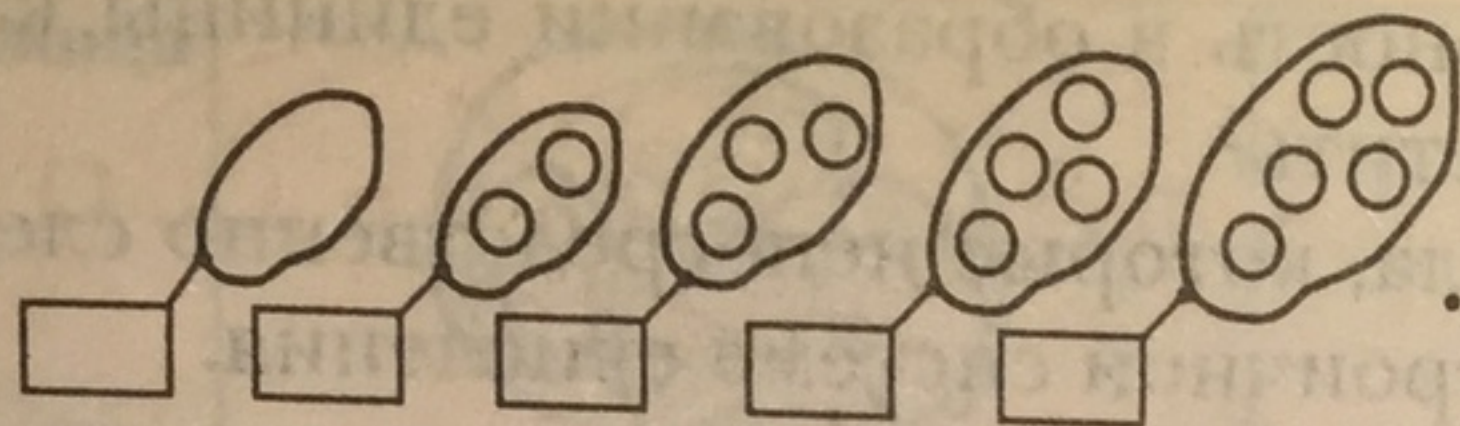


Рис. 133

- 1.7. У Незнайки на клумбе растет 101 (3) цветок. Нарисуй их количество.
 1.8. У Знайки на клумбе 21 (3) цветок. Нарисуй их количество.
 1.9. Сравни, у кого из коротышек больше цветов, у Знайки или Незнайки. Как можно сравнить число цветов у Знайки и Незнайки, если не рисовать картинку?
 1.10. Сравни числа 201 (3) и 221 (3), не рисуя картинку.
 1.11. Запиши число, которое следует за: 11 (3); 12 (3); 21 (3); 22 (3); 122 (3). Запиши число, которое предшествует 11 (3), 10 (3), 22 (3), 20 (3), 120 (3), 100 (3).
 1.12. Найди суммы и разности $21 + 1$, $22 + 1$, $122 + 1$, $22 - 1$, $122 - 1$, $120 - 1$, $100 - 1$, $200 - 1$, если все числа записаны в троичной системе счисления.
 1.13. С помощью рисунка найди суммы и разности $10 + 2$, $12 - 10$, $12 - 2$, $200 + 12$, $212 - 12$, $212 - 200$, если числа записаны в троичной системе.
 1.14. С помощью рисунка найди произведения и частные $1 \cdot 10$, $2 \cdot 10$, $10 \cdot 10$, $10 : 1$, $20 : 10$, $20 : 2$, $100 : 10$, если числа записаны в троичной системе.
 1.15. Найди число, которое больше 2 на 10, меньше 12 на 2, меньше 12 на 10. (Числа даны в троичной системе счисления.)
 1.16. Расположи данные числа в порядке возрастания 2, 22, 12, 102, 202, 121, 221. (Числа даны в троичной системе счисления.)
 1.17. Продолжи последовательность троичных чисел так далеко, как сможешь 0 1 2 10 11 12 20.
 Выпиши все числа, которые больше 11, но меньше 110.
 1.18. Вычисли: $2 \cdot 10 + 1$, $1 \cdot 10 + 2$, $2 \cdot 100 + 2$, $2 \cdot 100 + 12$.
 1.19. Запиши количество кружочков числом в троичной системе счисления.

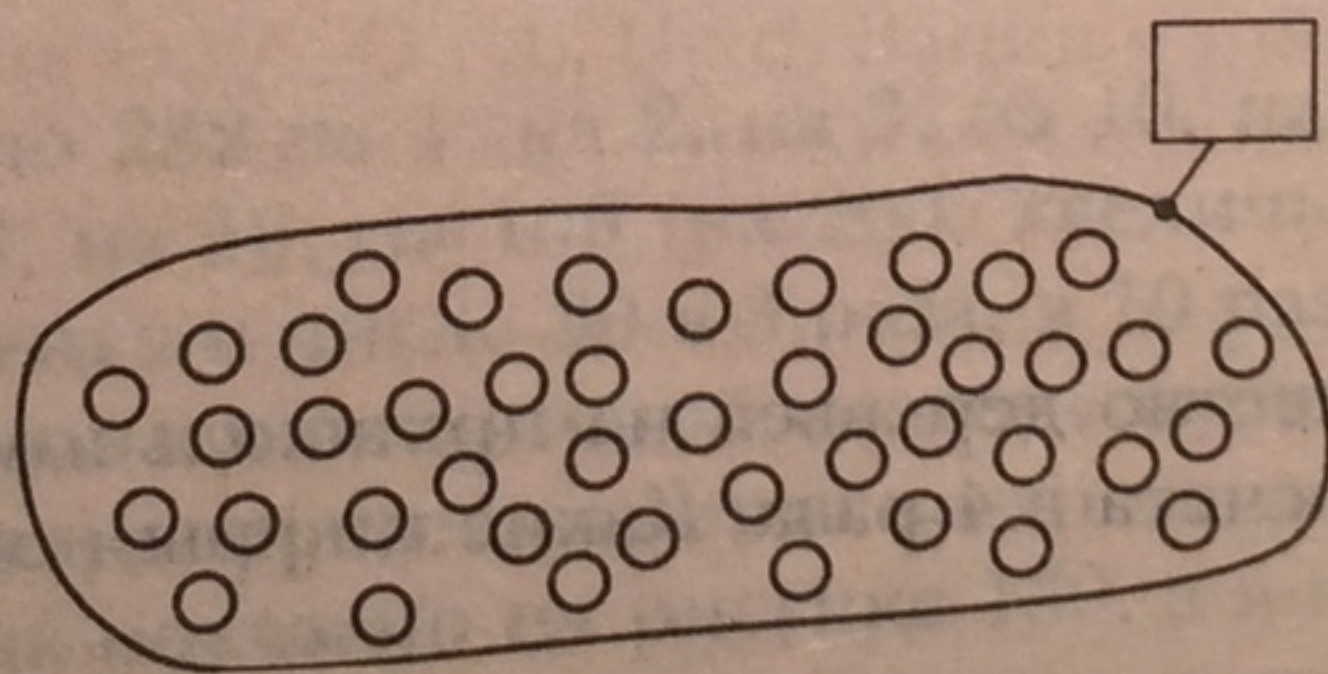


Рис. 134

Заполни таблицу:

Разрядная единица				
Количество				

Какую закономерность в образовании единицы каждого следующего разряда можно заметить?

1.20. Запиши числа, которые непосредственно следуют за 12, 22, 222, если числа даны в троичной системе счисления.

1.21. Запиши числа, которые непосредственно предшествуют 10, 100, 1000, если числа даны в троичной системе счисления.

1.22. На рисунке 135 измерь длину отрезка единицей e и запиши его меру числом в троичной системе.

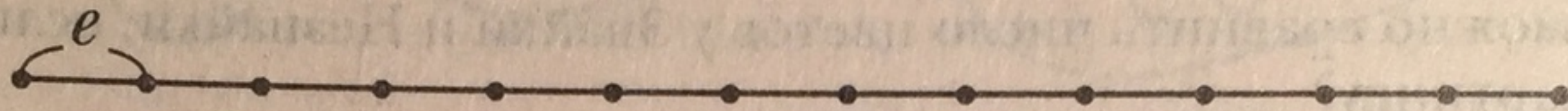


Рис. 135

1.23. Нарисуй отрезок длиной 101 (3), за единицу измерения возьми e (см. задачу 1.22).

1.24. Найди длину отрезка AB , не измеряя его.

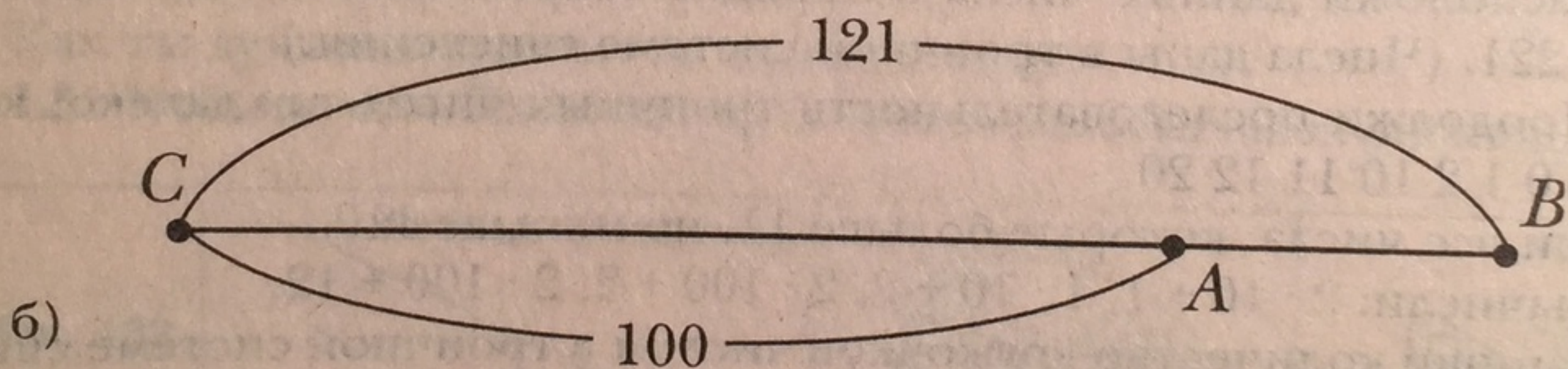
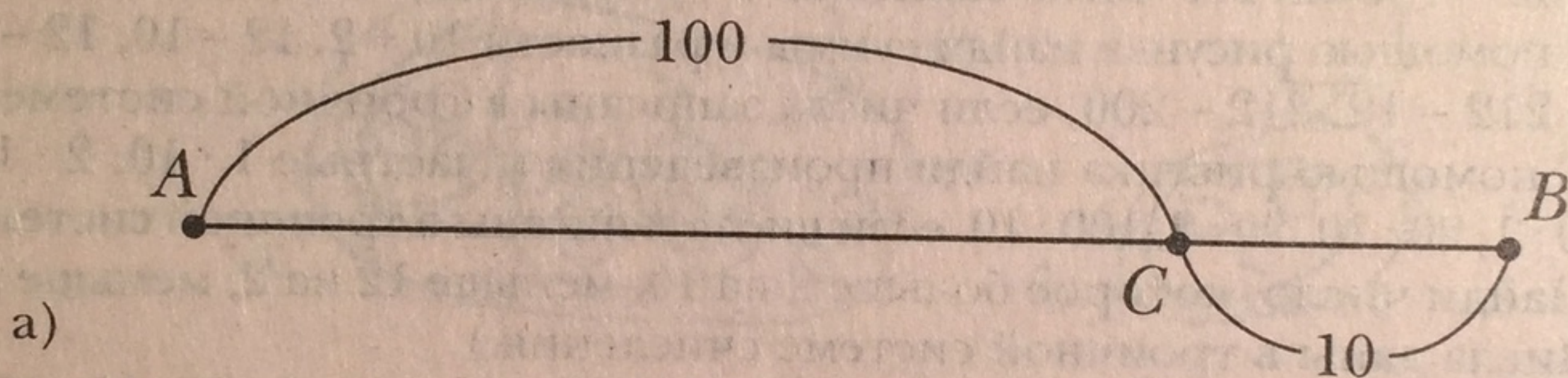


Рис. 136

Пример 2

2.1. Запиши количество деревьев на пришкольном участке (рис. 137). Увеличивай единицу счета в 4 раза. Какие цифры понадобятся? Заполни таблицу.

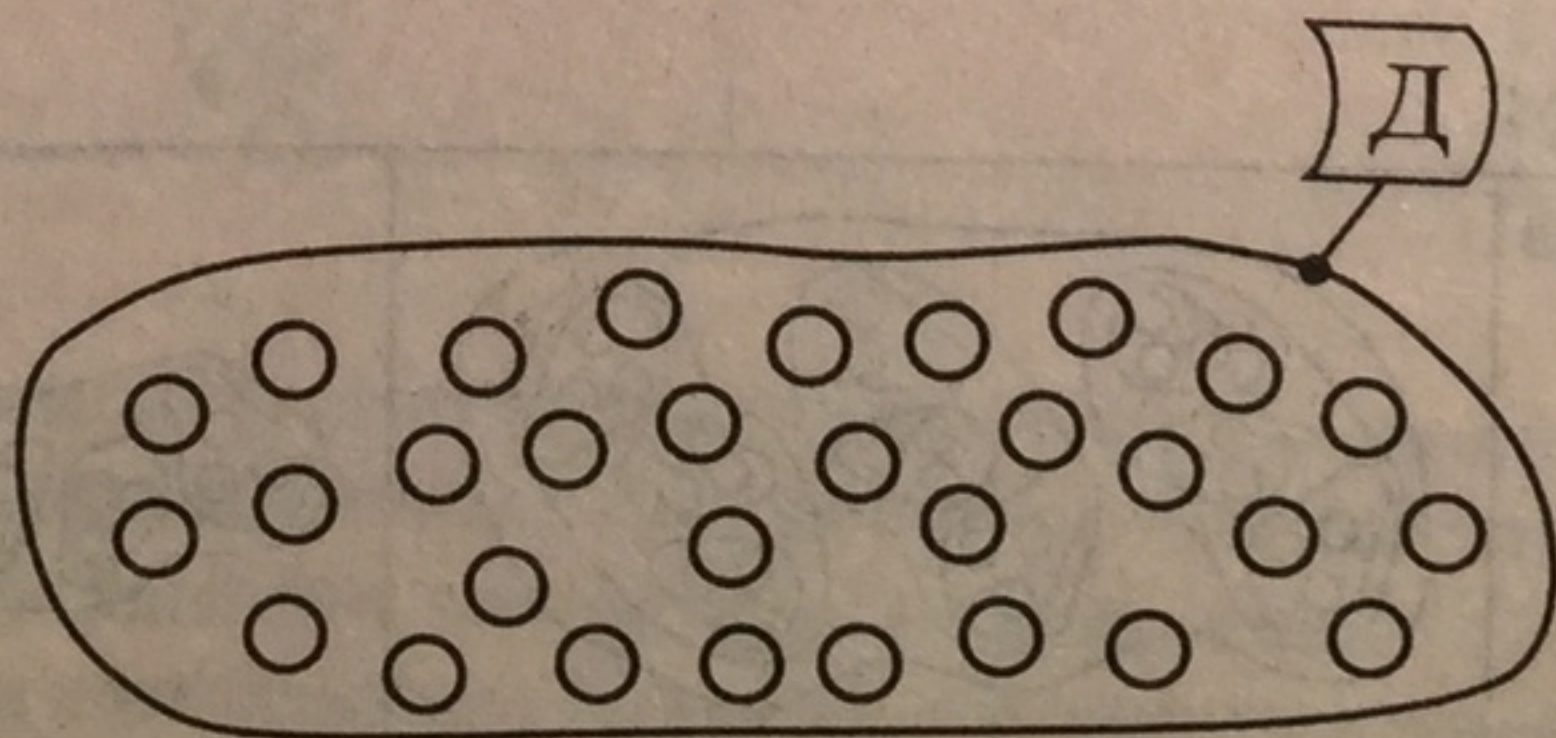
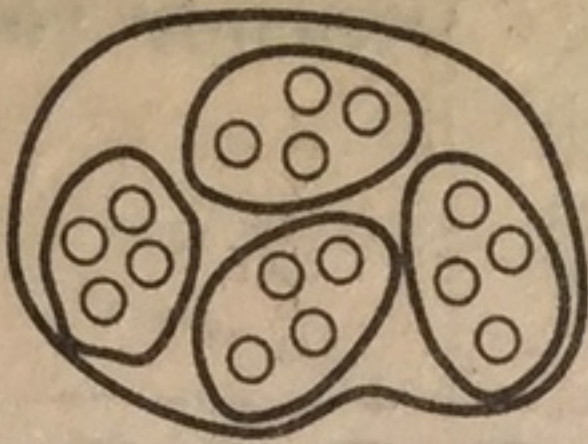




Рис. 137

Разрядная единица			
Количество			

2.2. В корзине 103 (4) яблока. Нарисуй их.

2.3. Найди значения выражений, если все числа записаны в четверичной системе счисления:

$$213 + 1$$

$$200 + 30$$

$$233 + 1$$

$$3 \cdot 100$$

$$32 \cdot 10$$

$$32 \cdot 10 + 1$$

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 2$$

$$220 - 1$$

$$230 - 30$$

$$300 - 1$$

$$300 : 3$$

$$320 : 32$$

$$321 - 1$$

$$322 - 22$$

$$220 - 213$$

$$230 - 200$$

$$300 - 233$$

$$300 : 100$$

$$320 : 10$$

$$321 - 300$$

$$322 - 22$$

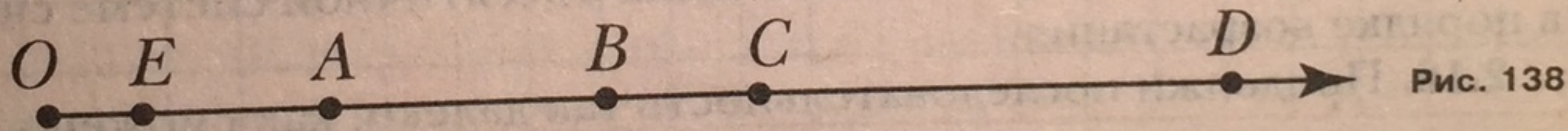
2.4. Сравни числа и расположи их в порядке возрастания

322, 312, 301, 320, 23, 203, 223, 32, 302.

2.5. Продолжи последовательность

0 1 2 3 10 11 12.

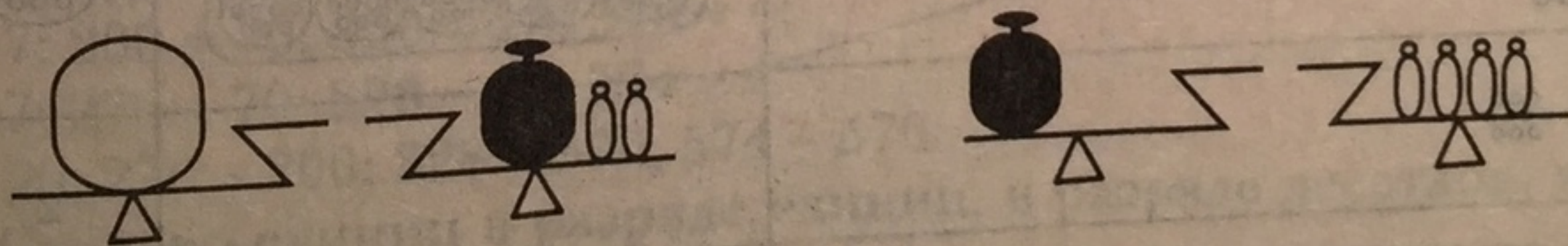
2.6. Под соответствующими буквами запиши на луче числа — длины отрезков OA , OB , OC , OD в четверичной системе, если длина OE — единица измерения (рис. 138).



2.7. Увеличь число 232 на 1, на 2, на 3, на 10, на 100. Уменьши число 232 на 1, на 2, на 3, на 10, на 100, на 200. Увеличь число 10 в 2 раза, в 3 раза, в 10 раз. Уменьши число 30 в 3 раза, в 10 раз, в 30 раз.

Все числа записаны в четверичной системе счисления.

2.8. В какой системе счисления легче всего записать массу груза, если ее измеряли так, как показано на рисунке 139, а в качестве единицы измерения взяли массу маленькой гири. Запиши полученное число.



2.9. Запиши числом в четверичной системе емкость бидона, если она равна емкости всех кружек, изображенных на рисунке 140. В качестве единицы измерения возьми емкость одной кружки.

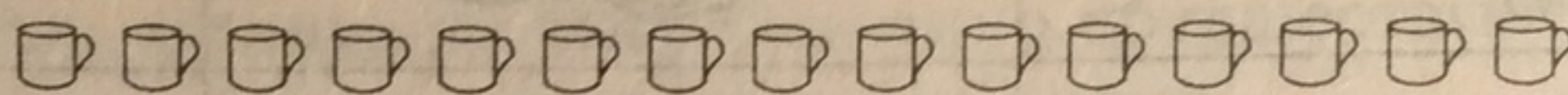
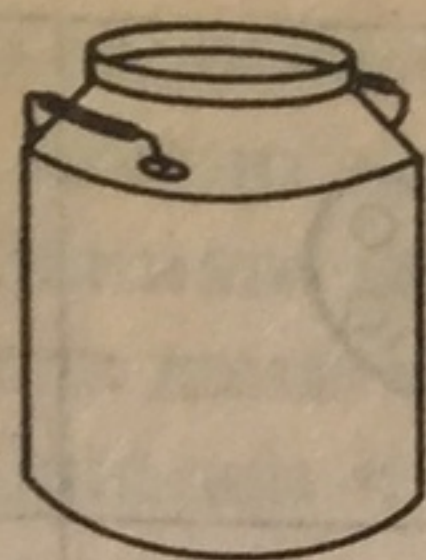


Рис. 140

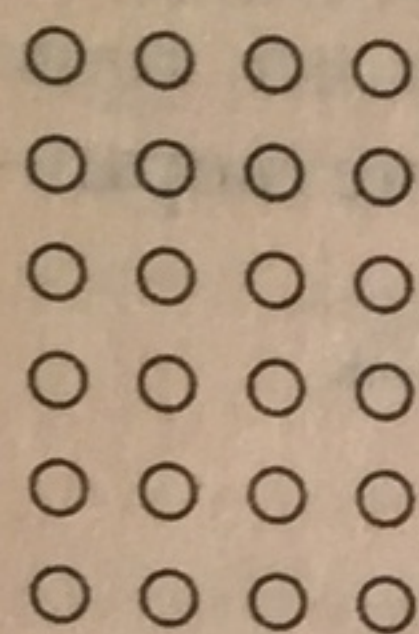


Рис. 141

2.10. На рисунке 141 изображены стулья. Запиши их количество сначала в троичной, затем — в четверичной системах счисления. Запиши полученное равенство.

2.11. Счетную единицу увеличили в 5 раз. Какие цифры понадобятся, чтобы записать результат счета?

2.12. Продолжи последовательность пятеричных чисел

0 1 2 3 4 10 11 12.

2.13. Сравни последовательности и продолжи каждую из них так далеко, как сможешь. Поставь вместо пропусков нужные числа:

0 1 2 10 11 12 20 21

0 1 2 3 10 11 12 13 20 21

0 1 2 3 4 10 11 12 13 14 20 21

0 1 2 3 4 5 10 11 12 13 14 15 20 21

11 (3) = ... (4), 20 (3) = ... (5), 20 (5) = ... (6).

2.14. Выпиши все однозначные числа в пятеричной, шестеричной и семеричной системах счисления. Запиши число, которое следует за 5 в шестеричной и семеричной системах. Запиши число, которое следует за числом 22 в троичной системе счисления, за числом 33 в четверичной системе, за числом 44 в пятеричной системе счисления.

2.15. Выпиши все однозначные числа в десятичной системе счисления в порядке возрастания.

2.16. Продолжи последовательность так далеко, как сможешь

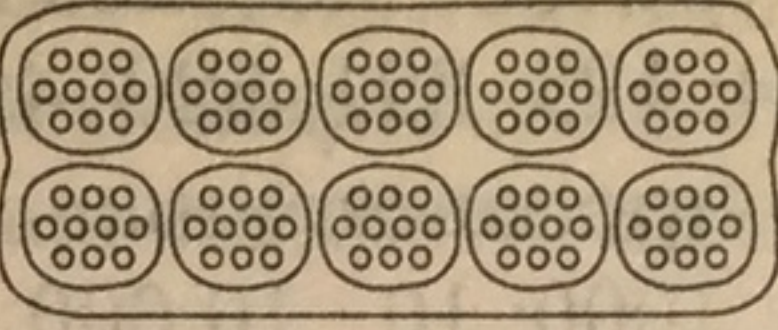
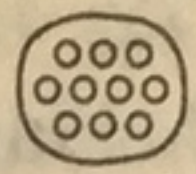

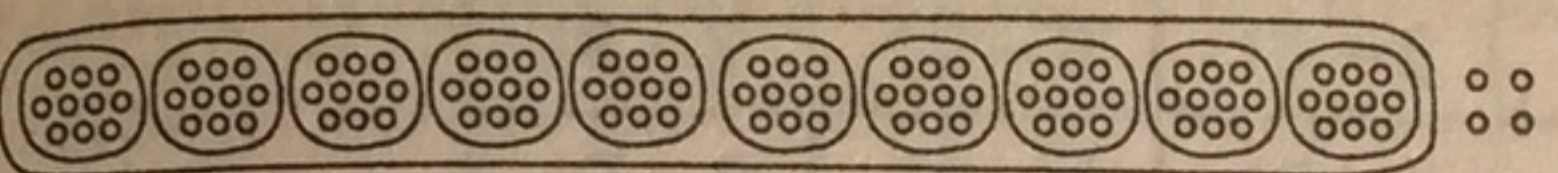
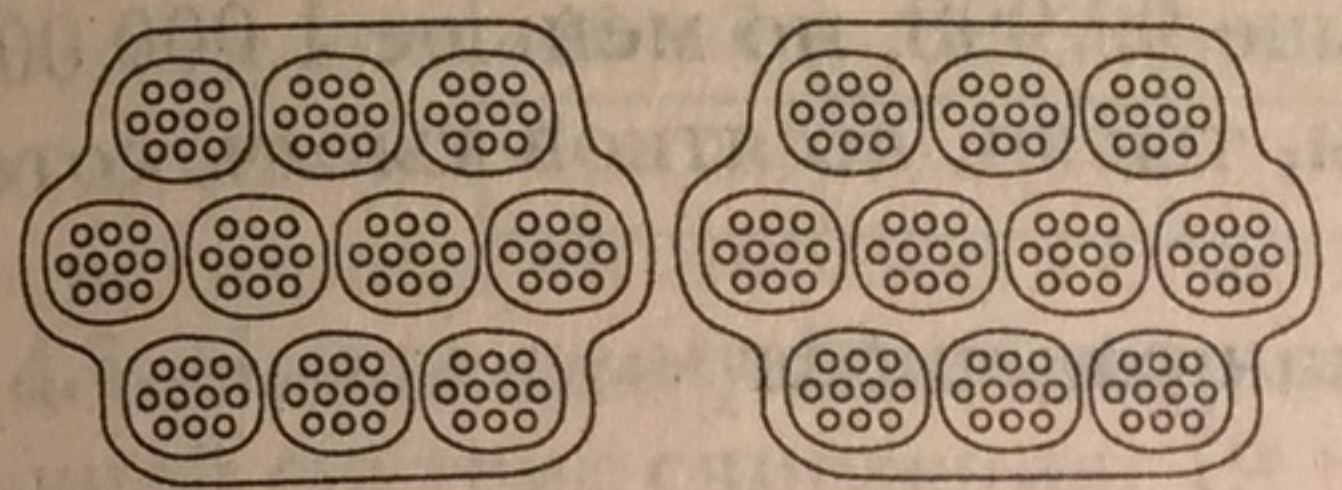
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.

Пример 3

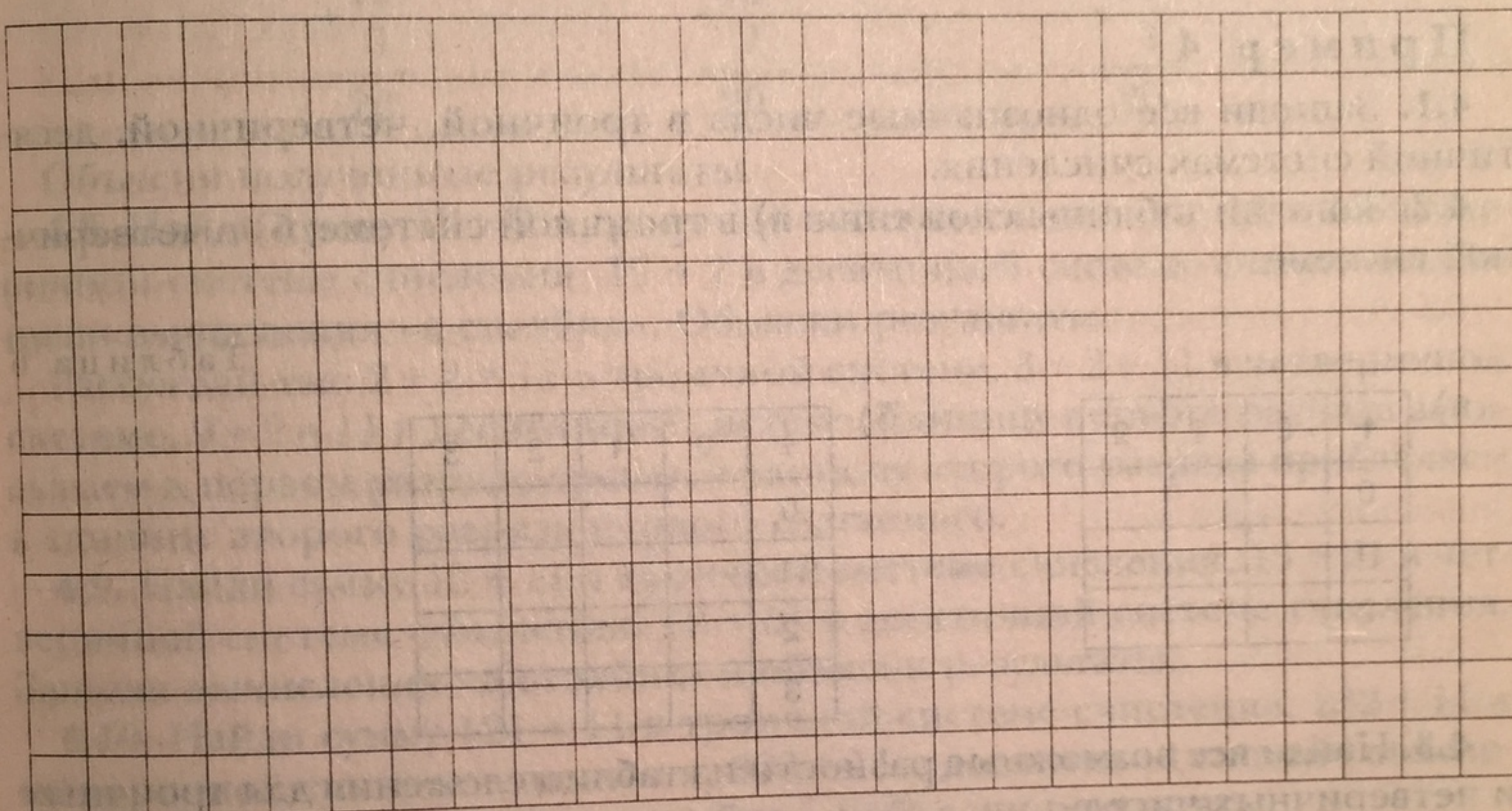
3.1. Прочитай числа, записанные в таблице 5.

Таблица 5

Разрядная единица			
Количество			○
		2	8
	1	3	9

Разрядная единица			
Количество			
	1	0	4
	2	0	0

3.2. Сосчитай число клеток в десятичной системе счисления.



3.3. Найди суммы и разности:

$19 + 1$; $39 + 1$; $99 + 1$; $299 + 1$; $699 + 1$; $999 + 1$;

$20 - 1$; $40 - 1$; $100 - 1$; $300 - 1$; $900 - 1$; $1000 - 1$.

3.4. Найди произведения и частные:

$2 \cdot 10$; $10 \cdot 10$; $5 \cdot 10$; $30 \cdot 10$; $700 \cdot 10$;

$20 : 2$; $100 : 10$; $500 : 5$; $300 : 30$; $7000 : 7$;

$20 : 10$; $500 : 100$; $300 : 10$; $7000 : 10$.

3.5. Найди суммы и разности:

$20 + 7$; $200 + 70$; $300 + 28$; $570 + 4$;

$27 - 7$; $270 - 70$; $328 - 28$; $574 - 4$;

$27 - 20$; $270 - 200$; $328 - 300$; $574 - 570$.

3.6. Сколько единиц в разряде единиц, в разряде десятков, в разряде сотен в числах 728? 304? 200?

3.7. Сколько единиц, десятков, сотен в числах 728? 304? 200?

3.8. Вычисли:

$7 \cdot 10 + 9$; $2 \cdot 100 + 54$; $3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6$.

- 3.9. Сравни числа и поставь нужный знак:
 $27 \ 72$; $43 \ 34$; $123 \ 321$; $520 \ 499$.
- 3.10. Найди произведения:
 $10 \cdot 100$; $10 \cdot 1000$; $10 \cdot 10\ 000$.
- 3.11. Найди суммы и разности:
 $999 + 1$; $9999 + 1$; $99\ 999 + 1$;
 $1000 - 1$; $10\ 000 - 1$; $1\ 000\ 000 - 1$.
- 3.12. Запиши все числа, которые больше 99 998, но меньше 1 000 002.
- 3.13. Сколько единиц, десятков, сотен, тысяч, десятков тысяч, сотен тысяч в числе 307 051?
- 3.14. В какой системе счисления записан ряд чисел
 $0 \ 1 \ 10 \ 11 \ 100 \ 101 \ 110 \ 111 \ 1000 \dots$?
 Продолжи этот ряд. Выпиши все четырехзначные числа в двоичной системе счисления.

Пример 4

- 4.1. Запиши все однозначные числа в троичной, четверичной, десятичной системах счисления.
- 4.2. Заполни таблицы сложения: а) в троичной системе; б) в четверичной системе.

Таблица 6

а)

+	0	1	2
0			
1			
2			

б)

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

- 4.3. Найди все возможные разности из таблиц сложения для троичных и четверичных чисел.

- 4.4. Заполни таблицу сложения для десятичных чисел. Какие числа в ней встречаются только один раз? 2 раза? Какое число в ней встречается самое большое число раз? Выпиши все суммы из таблицы сложения в столбики так, как показано в таблице 7.

Таблица 7

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$0 + 0$	$1 + 0$								$0 + 9$								$9 + 8$	$9 + 9$
	$0 + 1$								$1 + 8$								$8 + 9$	
									$2 + 7$									
									...									

- 4.5. Петя и Таня играют в такую игру. Петя называет любое число из таблицы сложения десятичных чисел, а Таня записывает все суммы, равные этому числу. Она получает столько очков, сколько правильно запи-

сала сумм. Затем они меняются ролями. Побеждает тот, кто наберет больше очков. Поиграй в такую игру с соседом по парте.

4.6. Найди значения выражений, допиши недостающие выражения и вычисли их значения:

18 - 9	17 - 9	16 - 9	15 - 9	14 - 9	...
17 - 8	16 - 8	15 - 8	14 - 8	...	
16 - 7	15 - 7		
...	...				

4.7. Найди сумму $12 + 1$ в троичной системе счисления, $13 + 1$ в четверичной системе счисления, $19 + 1$ в десятичной системе счисления.

Вычисления можно записать «в столбик»:

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 1 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ + 1 \\ \hline 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ + 1 \\ \hline 20 \end{array}$$

Объясни полученные результаты.

4.8. Найди сумму $12 + 2$ в троичной системе счисления, $13 + 2$ в четверичной системе счисления, $19 + 2$ в десятичной системе счисления. Запиши вычисления «в столбик». Объясни результаты.

Рассуждай так: $2 + 2 = 11$ в троичной системе, $3 + 2 = 11$ в четверичной системе, $9 + 2 = 11$ в десятичной системе. Единицу первого разряда записываем в первом разряде суммы, а единицу второго разряда прибавляем к единице второго разряда первого слагаемого.

4.9. Найди сумму $12 + 11$ в троичной системе счисления, $13 + 21$ в четверичной системе счисления, $19 + 81$ в десятичной системе счисления. Запиши вычисления «в столбик» и объясни результаты.

4.10. Найди сумму $121 + 11$ в троичной системе счисления, $232 + 11$ в четверичной системе счисления, $898 + 11$ в десятичной системе счисления. Запиши вычисления «в столбик» и объясни результаты.

4.11. Найди сумму $121 + 102$ в троичной системе счисления, $131 + 203$ в четверичной системе счисления, $191 + 809$ в десятичной системе счисления. Запиши вычисления «в столбик» и объясни результаты.

4.12. Найди суммы десятичных чисел «в столбик»:

$$241 + 328; 784 + 116; 296 + 712; 798 + 245.$$

4.13. Найди разности $20 - 1$ в троичной, четверичной и десятичной системах счисления. Сравни полученные результаты с задачей 4.7. Запиши вычисления «в столбик».

4.14. Найди разности $21 - 1$ в троичной, четверичной, десятичной системах счисления. Сравни результаты с задачей 4.8.

4.15. Найди разности $100 - 11$ в троичной, четверичной, десятичной системах счисления. Сравни результаты с задачей 4.9.

4.16. Найди разности $202 - 11$, $303 - 11$, $909 - 11$ в троичной, четверичной и десятичной системах счисления соответственно. Запиши вычисления «в столбик» и сравни результаты с задачей 4.10.

4.17. Найди разности $1000 - 102$, $1000 - 203$, $1000 - 809$ в троичной, четверичной и десятичной системах счисления соответственно. Сравни результаты с задачей 4.11.

4.18. Найди разности $669 - 328$, $900 - 784$, $1008 - 296$, $1043 - 245$ в десятичной системе счисления. Сравни результаты с задачей 4.12.

Пример 5

5.1. Составь таблицы умножения в троичной и четверичной системах счисления.

5.2. 2 и 3 записаны в десятичной системе счисления. Нарисуй произведения $2 \cdot 2$ и $2 \cdot 3$. Сравни их. Результат сравнения можно записать так: $2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 + 2$.

5.3. Сравни произведения $2 \cdot 3$ и $3 \cdot 2$. (Числа записаны в четверичной системе счисления.)

5.4. Нарисуй произведения $3 \cdot 3$ и $3 \cdot 4$. Запиши результат сравнения. (Числа записаны в десятичной системе счисления.)

5.5. Сравни произведения $3 \cdot 4$ и $4 \cdot 3$. (Числа записаны в десятичной системе счисления.)

5.6. Составь фрагмент таблицы умножения в десятичной системе счисления (см. табл. 8).

5.7. Нарисуй произведения $5 \cdot 5$, $5 \cdot 2$, $5 \cdot 3$. Сравни их и запиши результат сравнения.

5.8. Зная, что $5 \cdot 3 = 15$ и $5 \cdot 4 = 20$, найди произведения $5 \cdot 6$ и $5 \cdot 7$.

5.9. Составь фрагмент таблицы умножения в десятичной системе счисления (см. табл. 9).

Сравни последний столбец и последнюю строку в этой таблице.

5.10. Зная произведения $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, найди произведения $2 \cdot 6$, $3 \cdot 6$.

5.11. Составь фрагмент таблицы умножения в десятичной системе счисления (см. табл. 10).

5.12. Найди произведения $3 \cdot 7$, $4 \cdot 7$, $4 \cdot 8$.

5.13. Найди произведения $5 \cdot 7$, $6 \cdot 7$, $7 \cdot 7$.

5.14. Составь фрагмент таблицы умножения в десятичной системе счисления (см. табл. 11).

5.15. Найди произведения $7 \cdot 8$, $8 \cdot 8$.

5.16. Составь фрагмент таблицы умножения (см. табл. 12).

5.17. Найди произведения $8 \cdot 9$, $9 \cdot 9$. Составь фрагмент таблицы умножения (см. табл. 13).

Таблица 8

×	2	3	4
2			
3			
4			

Таблица 9

×	2	3	4	5
2				
3				
4				
5				

Таблица 10

×	2	3	4	5	6
2					
3					
4					
5					
6					

Таблица 11

×	2	3	4	5	6	7
2						
3						
4						
5						
6						
7						

Таблица 12

×	2	3	4	5	6	7	8
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

Таблица 13

×	2	3	4	5	6	7	8	9
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								

Таблица 14

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

5.18. Составь полностью таблицу умножения в десятичной системе счисления (см. табл. 14).

5.19. Выпиши все разные числа от 4 до 81 из таблицы умножения десятичных чисел в порядке убывания и заполни таблицу 15:

Таблица 15

81	72	64		4
9 · 9	9 · 8	8 · 8		
	8 · 9			

5.20. Заполни таблицу 16:

Таблица 16

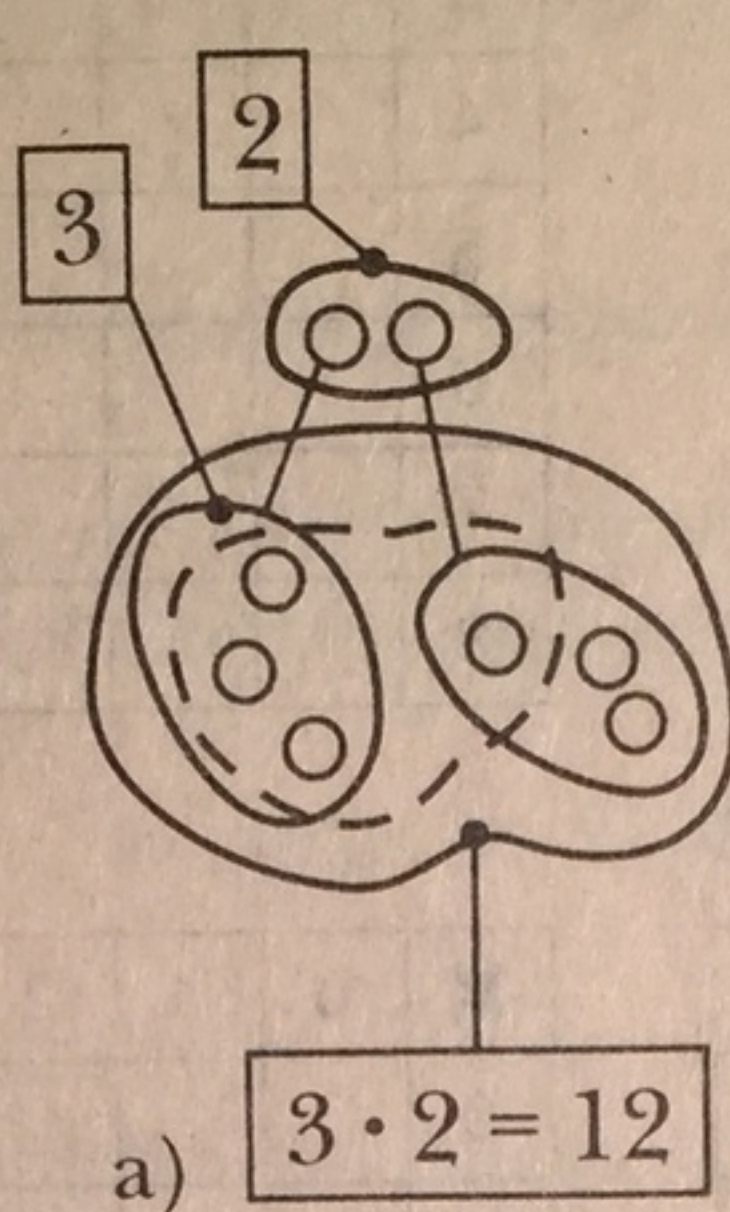
81	72	64	63	56	54	49	48	45	42	40	36	35	32	30	28	27	25	24	21	20	18	16	15	14	12	10	9	8	6	4
81:9=9	72:9=8	64:8=8																												
	72:8=9																													

Пример 6

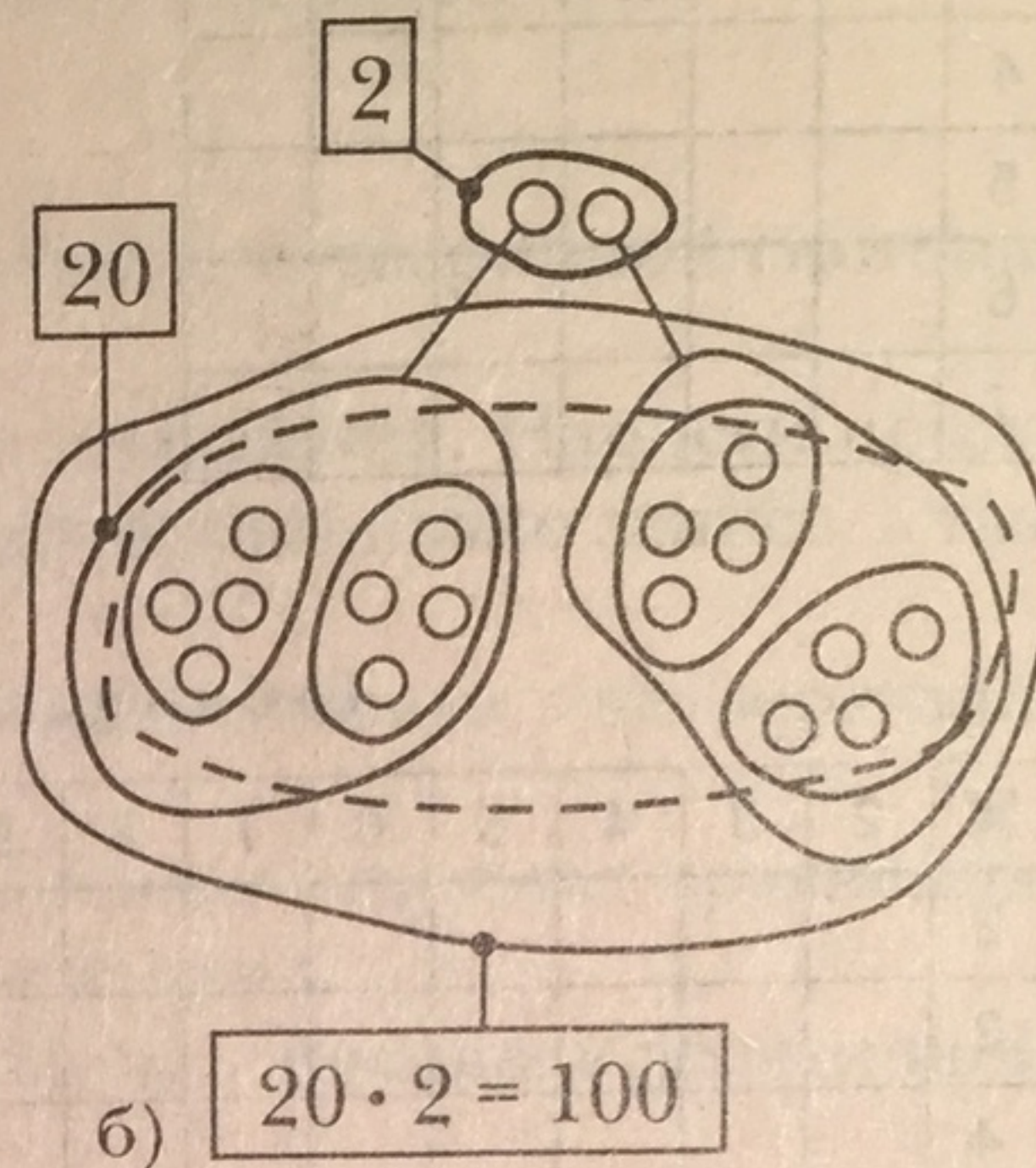
6.1. Найди произведение $23 \cdot 2$ для чисел в четверичной системе счисления. Воспользуйся таблицей умножения в четверичной системе и заполни таблицу 17:

Таблица 17

III р.	II р.	I р.
	2	3 2
	×	
	10	12
		10 + 2
		2



$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 &= 12 \\ 12 &= 10 + 2 = \\ &= 1 \text{ ед. II р.} + 2 \text{ ед. I р.} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 20 \cdot 2 &= 100 \\ 100 &= 10 \text{ ед. II р.} = \\ &= 1 \text{ ед. III р.} \end{aligned}$$

Рис. 142

Кратко такое умножение записывают:

$$\begin{array}{r} \times 23 \\ 2 \\ \hline 112 (4) \end{array}$$

6.2. Найди произведения чисел в четверичной системе счисления. Запиши кратко «в столбик»:

$$12 \cdot 3; 123 \cdot 3; 103 \cdot 3; 32 \cdot 2; 230 \cdot 2; 321 \cdot 2; 200 \cdot 3; 230 \cdot 2.$$

6.3. Найди произведение $26 \cdot 8$ чисел, записанных в десятичной системе счисления. Воспользуйся таблицей умножения и заполни таблицу. Запиши кратко «в столбик».

Сот.	Дес.	Ед.
	2	6 8
	×	
	16	48
	10 + 6	40 + 8
	6 + 4	8
	10	8

	2	6
×		8

6.4. Найди произведения десятичных чисел, запиши кратко «в столбик»: $126 \cdot 8$; $57 \cdot 9$; $274 \cdot 5$; $1272 \cdot 3$; $705 \cdot 6$; $120 \cdot 8$; $250 \cdot 7$; $300 \cdot 4$.

6.5. Найди произведение чисел $212 \cdot 21$ в троичной системе счисления. Заполни таблицу. Закончи запись в столбик:

V р.	IV р.	III р.	II р.	I р.
		2	1	2
		×	2	1
		2	1	2
	+	2	10 + 1	
		10 +		

		2	1	2	
	×		2	1	
		2	1	2	
+					
1	2	0	1		
					(3)

6.6. Найди произведение десятичных чисел $124 \cdot 36$.

Тыс.	Сот.	Дес.	Ед.
	1	2	4
	×	3	6
	6	10 + 2	20 + 4
+	3	6	10 + 2
	10 +		

		1	2	4	
	×		3	6	
		7	4	4	
+					
3	7	2			

6.7. С помощью таблиц сложения и умножения найди произведения четверичных чисел. Запиши «в столбик»: $312 \cdot 21$; $221 \cdot 32$; $302 \cdot 23$.

6.8. Найди, записывая вычисления «в столбик», произведения десятичных чисел: $28 \cdot 57$; $34 \cdot 86$; $328 \cdot 15$; $704 \cdot 45$; $1231 \cdot 53$; $120 \cdot 72$; $300 \cdot 42$.

Пример 7

7.1. Четверичные числа 30, 31, 32, 33 раздели на 3. С помощью картинки найди те из них, которые делятся на 3, и те, которые не делятся (рис. 143).

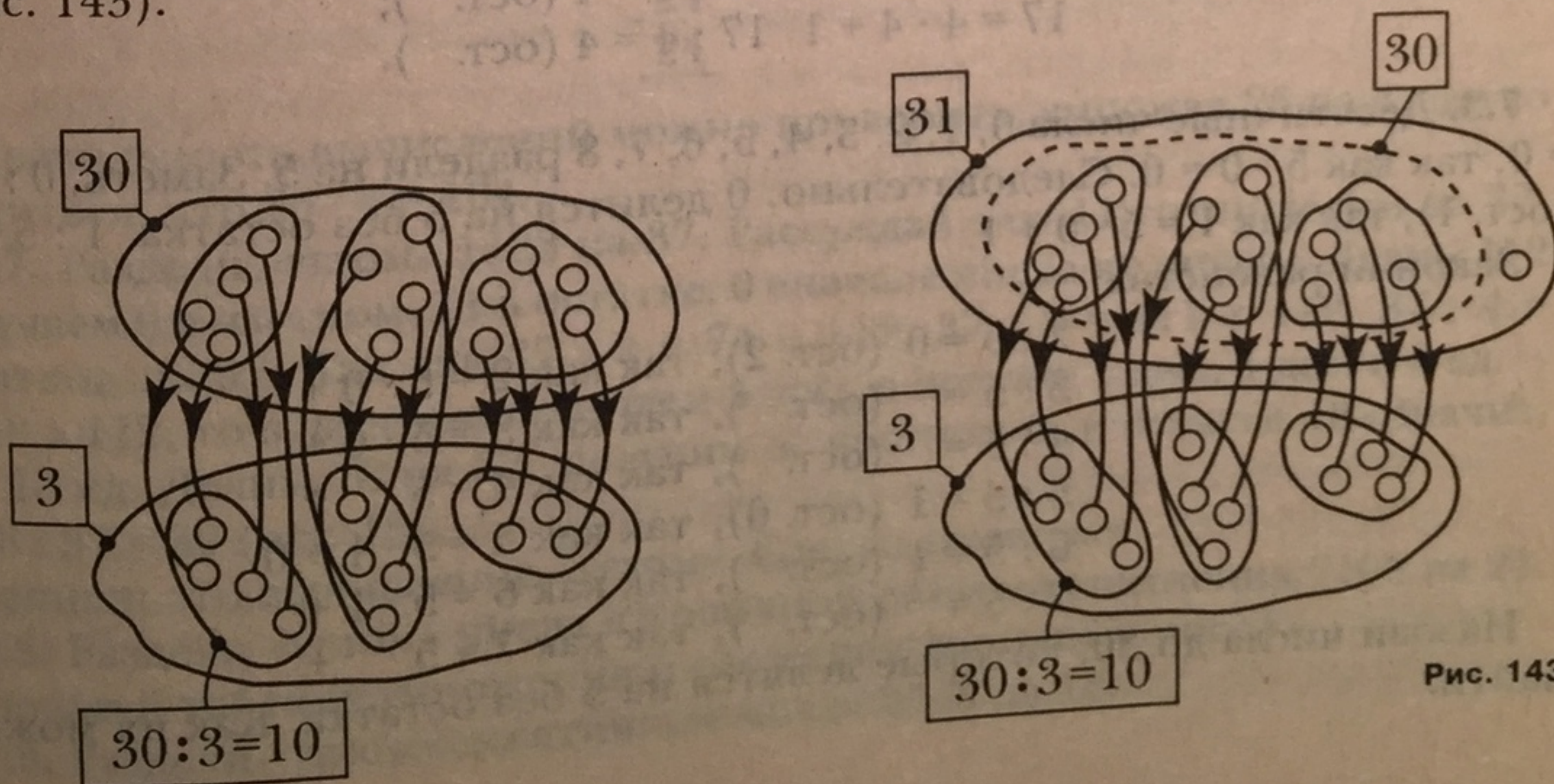


Рис. 143

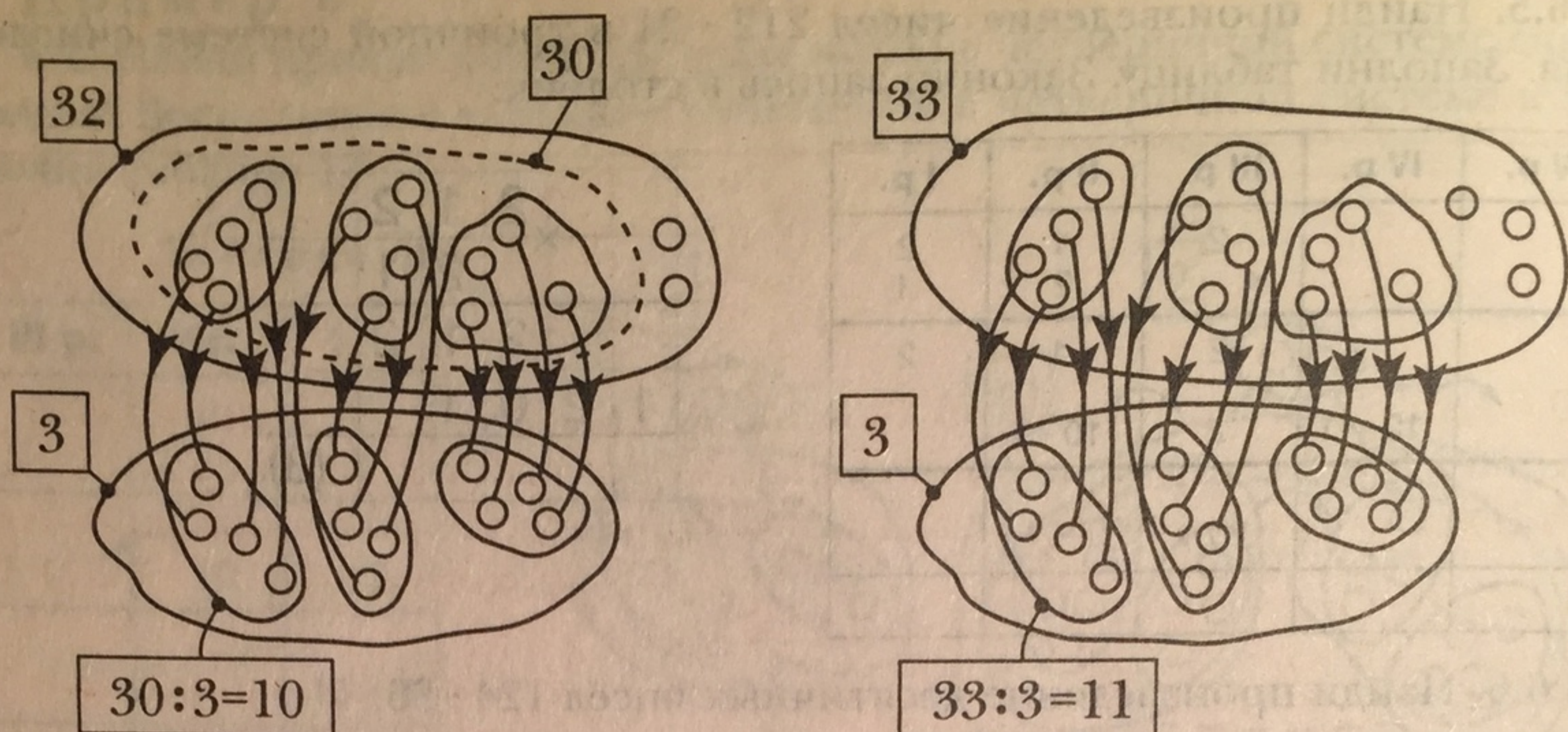


Рис. 143

Из рисунка 143 видно, что $30 = 3 \cdot 10$, $31 = 3 \cdot 10 + 1$, $32 = 3 \cdot 10 + 2$, $33 = 3 \cdot 11$. Это значит, что 30 при делении на 3 дает в частном 10, 33 при делении на 3 дает в частном 11, а 31 и 32 не делятся на 3. При делении 31 на 3 остается остаток 1, при делении 32 на 3 остается остаток 2. Это записывают так:

$$\begin{aligned} 31 : 3 &= 10 \text{ (ост. 1),} \\ 32 : 3 &= 10 \text{ (ост. 2).} \end{aligned}$$

В четверичной системе за 33 непосредственно следует число 100. Догадайся, какое частное и остаток получатся при делении 100 на 3. Закончи равенства: $100 = 3 \cdot 11 + 1$, $100 : 3 = \text{ (ост.)}$

Сравни делитель и остаток.

7.2. Десятичные числа 12, 13, 14, 15, 16, 17, раздели на 4. Закончи равенства:

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot 3, & 12 : 4 &= \text{ (ост. 0);} \\ 13 &= 4 \cdot 3 + 1 & 13 : 4 &= 3 \text{ (ост.);} \\ 14 &= 4 \cdot 3 + 2 & 14 : 4 &= 3 \text{ (ост.);} \\ 15 &= 4 \cdot 3 + 3 & 15 : 4 &= 3 \text{ (ост.);} \\ 16 &= 4 \cdot 4 + 0 & 16 : 4 &= 4 \text{ (ост.);} \\ 17 &= 4 \cdot 4 + 1 & 17 : 4 &= 4 \text{ (ост.).} \end{aligned}$$

7.3. Десятичные числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 раздели на 5. Заметь, $0 : 5 = 0$, так как $5 \cdot 0 = 0$. Следовательно, 0 делится на 5 без остатка. $1 : 5 = 0$ (ост. 1), так как $1 = 5 \cdot 0 + 1$.

Закончи равенства:

$$\begin{aligned} 2 : 5 &= 0 \text{ (ост. 2), так как } 2 = 5 \cdot 0 + \\ 3 : 5 &= \text{ (ост.), так как } 3 = 5 \cdot 0 + \\ 4 : 5 &= \text{ (ост.), так как } 4 = 5 \cdot + \\ 5 : 5 &= 1 \text{ (ост. 0), так как } 5 = 5 \cdot 1 + 0 \\ 6 : 5 &= 1 \text{ (ост.), так как } 6 = 5 \cdot 1 + \\ 7 : 5 &= \text{ (ост.), так как } 7 = 5 \cdot + \end{aligned}$$

Назови числа до 30, которые делятся на 5 без остатка. Как их можно найти?

7.4. Найди частное и остаток при делении десятичных чисел: 12 на 15, 23 на 52, 71 на 80, 34 на 52, 18 на 31, 3 на 12, 124 на 215.

7.5. Найди частное и остаток при делении 68 на 12. Рассуждай так: $12 \cdot 2 = 24 < 68$, $12 \cdot 3 = 36 < 68$, $12 \cdot 4 = 48 < 68$, $12 \cdot 5 = 60 < 68$, $12 \cdot 7 = 84 > 68$. Значит, 68 не делится на 12 без остатка.

Так как $68 = 12 \cdot 5 + 8$, то $68 : 12 = 5$ (ост. 8).

7.6. Раздели 104 на 4. Рассуждай так: в числе 104 10 десятков. 10 десятков делим на 4, получим 2 десятка в частном и 2 десятка в остатке, так как $10 = 4 \cdot 2 + 2$. 2 десятка и 4 единицы это 24. Делим 24 на 4, получим 6, так как $24 = 4 \cdot 6$. Значит, $104 : 4 = 26$. Сравни это рассуждение с рисунком 144.

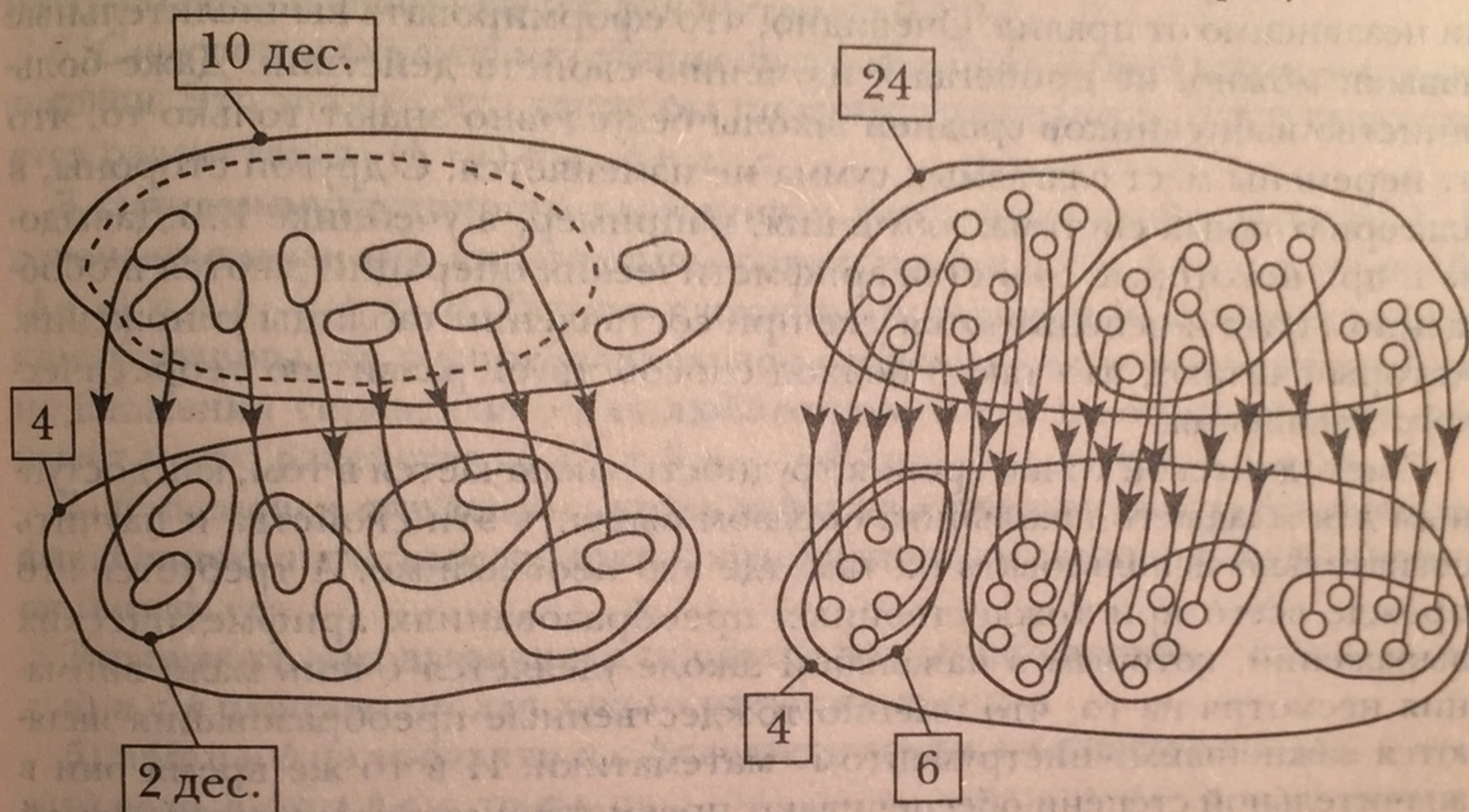


Рис. 144

Кратко такое вычисление записывают «углом»:

$$\begin{array}{r|l} 104 & 4 \\ \hline 8 & 26 \\ \hline 24 & \\ \hline 24 & \\ \hline \end{array}$$

Правильность вычислений можно проверить, умножая 26 на 4. Легко убедиться, что $26 \cdot 4 = 104$.

7.7. Раздели «углом» 1128 на 37. Рассуждай так: 11 сотен делим на 37, получаем 0 в частном, 11 в остатке. 0 в начале числа не пишем. Делим 112 десятков на 37. Так как $37 \cdot 2 = 74 < 112$, $37 \cdot 3 = 111 < 112$, $37 \cdot 4 = 148 > 112$, то в частном получаем 3 дес., в остатке 1 дес., 1 дес. и 8 ед. — это 18 ед. Делим 18 на 37, получим в частном 0, в остатке 18. Значит, $1128 : 37 = 30$ (ост. 18).

Запиши это вычисление «углом». Сделай проверку.

7.8. Раздели «углом» числа в троичной системе счисления 2102 на 21. Используй таблицу умножения и сложения троичных чисел.

7.9. Раздели «углом» десятичные числа 2448 на 12.

§ 7. Свойства арифметических действий и их изучение в начальной школе

В традиционной системе обучения младших школьников математике (М.И.Моро и др.) изучение свойств арифметических действий направлено на обоснование вычислительных приемов. Этим обуславливается, что они (свойства) предъявляются детям в виде операциональных правил «чтобы найти значение некоторого выражения, можно сделать». Но, как показывает практика, при выполнении вычислений ученики не обращаются к правилам, а пользуются теми алгоритмами, которые усвоили независимо от правил. Очевидно, что сформировать вычислительные навыки можно, не прибегая к изучению свойств действий. Даже большинство выпускников средней школы безусловно знают только то, что от перемены мест слагаемых сумма не изменяется. С другой стороны, в альтернативных системах обучения, например, в учебнике В.В.Давыдова и др., некоторые свойства арифметических операций даются в обобщенном виде и используются уже при составлении таблицы умножения. Авторы считают, что такой подход способствует развитию теоретического мышления.

С методической точки зрения трудность заключается в том, как доступным для младшего школьника образом выявить эти свойства и научить сознательно использовать их там, где это необходимо. А требуется это прежде всего при тождественных преобразованиях арифметических выражений, которым в начальной школе уделяется очень мало внимания несмотря на то, что именно тождественные преобразования являются важнейшим «инструментом» математики. И в то же время они в значительной степени обеспечивают преемственность между начальной и основной школой.

Арифметические операции и их свойства являются предметом изучения алгебры и, в этом смысле, выходят за пределы арифметики. С точки зрения алгебры система натуральных чисел представляет собой непустое множество с двумя операциями и отношением порядка, которые обладают следующими свойствами.

1. *Сложение существует и единственно.* Это значит, что какие бы два натуральных числа ни взять, всегда имеется единственное натуральное число, которое является их суммой.

1а. *Умножение существует и единственно.*

2. *Сложение ассоциативно* (сочетательное свойство сложения). Обычно его записывают в виде $a + (b + c) = (a + b) + c$. Это равенство означает, что какие бы ни взять натуральные числа, *порядок действий* в таком выражении *безразличен*. Это утверждение справедливо при любом конечном числе слагаемых.

2а. *Умножение ассоциативно* (сочетательное свойство умножения). Его смысл аналогичен, т.е. *порядок действий в любом выражении, содержащем только действие умножения, произволен*.

3. *Сложение коммутативно* (переместительное свойство сложения). Обычно его записывают в виде $a + b = b + a$ для любых натуральных a и b .

Оно также справедливо для любого конечного числа слагаемых и означает, что в выражении, содержащем только действие сложения, порядок слагаемых произволен.

3а. Умножение коммутативно. Смысл этого свойства умножения аналогичен свойству коммутативности сложения.

4. Для сложения существует нейтральный элемент 0. Что означает: для любого натурального a выполняется равенство $a + 0 = a$.

4а. Для умножения существует нейтральный элемент 1. Это значит, что для любого натурального a выполняется равенство $a \cdot 1 = a$.

5. Для умножения существует поглощающий элемент 0, т.е. для любого натурального a выполняется равенство $a \cdot 0 = 0$.

6. Сложение и умножение связаны дистрибутивным (распределительным) законом. Это значит, что какие бы ни взять натуральные a, b, c выполняется равенство $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

В силу коммутативности сложения и умножения свойства 4, 4а, 5, 6 означают также, что справедливы равенства $0 + a = a$, $1 \cdot a = a$, $0 \cdot a = 0$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$. Так как сложение и умножение ассоциативны и коммутативны, то распределительное свойство умножения относительно сложения справедливо для любого конечного числа слагаемых, т.е. имеет место равенство $a \cdot (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + \dots + a \cdot b_n$.

7. В системе натуральных чисел определено отношение порядка антирефлексивное, антисимметричное, транзитивное и связное, обозначаемое символом « $<$ ».

Это значит, что выполняются следующие утверждения:

а) $a < a$ неверно ни для какого натурального a ;

б) при $a \neq b$ из того, что $a < b$ следует, что $b < a$ неверно;

в) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;

г) если $a \neq b$, то либо $a < b$, либо $b < a$.

Если $a < b$ или $a = b$, то такое отношение между a и b записывается $a \leq b$ (читается: a меньше или равно b).

Если M непустое подмножество натуральных чисел, то $a \in M$ называется наименьшим элементом M при выполнении следующего условия: для всякого $b \in M$ имеет место неравенство $a \leq b$.

8. Каждое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьший элемент.

9. Отношение порядка и операция сложения связаны между собой: $a < b$ тогда и только тогда, когда найдется такое натуральное $c \neq 0$, что имеет место равенство $a + c = b$.

10. Для любого натурального a выполняется утверждение: не существует натурального b такого, что $a < b$ и $b < a + 1$.

Это свойство называется дискретностью порядка. Из этих 10 свойств в качестве следствий можно получить ряд других также явно или неявно используемых в курсе математики начальной школы.

1.1. Свойство сократимости сложения.

Из существования и единственности сложения следует, что если $a = b$, то $a + c = b + c$ для всяких натуральных a, b и c . Оказывается, что верно и

обратное утверждение, которое называется свойством сократимости, а именно:

если $a + b = a + c$, то $b = c$.

Допустим, что $b \neq c$. Тогда в силу 7, г имеем, что либо $b < c$, либо $c < b$. Пусть $b < c$, тогда, согласно 9, найдется натуральное $x \neq 0$, при котором $b + x = c$. Отсюда $a + c = a + (b + x)$. В силу ассоциативности сложения получаем $a + c = (a + b) + x$, т.е. $a + b < a + c$, что противоречит условию.

Аналогичное рассуждение приводит к противоречию в случае допущения $c < b$.

Это свойство означает, что к обеим частям верного равенства можно прибавлять или вычитать (сокращать) одно и то же слагаемое.

1.2. Свойство сократимости умножения.

Если $a \cdot b = a \cdot c$ и $a \neq 0$, то $b = c$.

Докажите его самостоятельно.

Вместе со свойством существования и единственности умножения свойство сократимости означает, что обе части верного равенства можно умножить или сократить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля.

1.3. Свойство монотонности сложения.

Если $a < b$, то при всяком натуральном c

$$a + c < b + c.$$

Из $a < b$ следует, в силу 9, что существует $x \neq 0$ такой, что $a + x = b$. Тогда $(a + x) + c = b + c$. Отсюда, так как сложение ассоциативно и коммутативно, получаем $(a + c) + x = b + c$. Что и означает справедливость неравенства $a + c < b + c$.

1.4. Свойство монотонности умножения.

Если $a < b$, то при всяком $c \neq 0$

$$a \cdot c < b \cdot c.$$

Докажите его самостоятельно.

1.5. В системе натуральных чисел 0 есть наименьший элемент.

Следует из свойств 4 и 9.

В системе натуральных чисел можно рассмотреть еще одно отношение порядка, обратное отношению « $<$ ». А именно,

$a > b$ тогда и только тогда, когда $b < a$.

Аналогично с отношением « \leq » определяется отношение « \geq ».

1.6. Для всякого $a \geq 1$ и $b \neq 0$ $a \cdot b \geq b$.

Следует из монотонности умножения.

1.7. Свойство архимедовости порядка.

Для любых натуральных a и b , отличных от нуля, найдется такое натуральное n , что $n \cdot a > b$.

Действительно, для всякого $a \neq 0$ выполняется неравенство $a \geq 1$ в силу того, что 0 — наименьший элемент. Умножим обе части этого неравенства на $b+1$, тогда по свойству монотонности умножения получим $(b+1) a \geq b+1$. Но $b+1 > b$ (монотонность сложения). Отсюда $(b+1) a > b$ (транзитивность порядка). Таким образом, в качестве n можно взять $b+1$.

Свойство архимедовости порядка является основанием «приложимости» натуральных чисел к процессу измерения положительных скалярных

величин. Действительно, из него следует, что процесс деления измеряемой величины на части, равные выбранной единице измерения, обязательно закончится через некоторое количество шагов либо тем, что на n -ом шаге в точности исчерпается вся измеряемая величина, либо она будет превзойдена менее чем на единицу измерения.

1.8. Элементы системы натуральных чисел образуют последовательность.

Наименьшим натуральным числом является 0. Так, $1 = 0 + 1$, и в силу дискретности порядка наименьшим числом во множестве натуральных чисел без нуля будет 1, так как каждое непустое подмножество натуральных чисел содержит наименьший элемент. В силу того, что для любых натуральных чисел существует и единственная сумма, то наименьшим числом во множестве натуральных чисел без нуля и единицы является число $1 + 1$. Рассуждая таким же образом, получаем ряд

$$0 + 1 \quad 1 + 1 \quad 1 + 1 + 1 \quad 1 + 1 + 1 + 1 \dots$$

До сих пор мы рассматривали только две операции: сложение и умножение. Это не случайно. Сложение и умножение являются основными, не зависящими друг от друга операциями в системе натуральных чисел. Это значит, что каждая из них имеет вполне определенный смысл и может изучаться независимо друг от друга. Но из этого следует, что определяя умножение как сумму равных слагаемых, которое справедливо только для натуральных чисел и в дальнейшем обучении должно быть забыто, общепринятая методика грешит не только против математической истины, но и против учащихся.

Операции вычитания и деления являются соответственно производными от сложения и умножения, т.е. определяются с помощью сложения и умножения. Обычно словами это выражают так: вычитание есть операция, обратная сложению, а деление — операция, обратная умножению. Каков же смысл понятия «обратная операция»?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо вспомнить, что разность $a - b$ — это такое число, прибавляя которое к b , получаем a и записывается так: $b + (a - b) = a$ или, по свойству коммутативности, $(a - b) + b = a$. Отсюда следует, что разность $a - b$ есть решение уравнений $b + x = a$ и $x + b = a$.

Аналогичная ситуация с делением. Частное $a : b$ при $b \neq 0$ есть такое число, умножая которое на b , получаем a и записывается так: $(a : b) \cdot b = a$ или, по свойству коммутативности, $b \cdot (a : b) = a$.

Вообще, если на некотором множестве A , предполагая A непустым, задана некоторая операция \circ , т.е. для любых двух a и b из A , взятых в указанном порядке, в A существует и единственен элемент c такой, что $a \circ b = c$, то операция $*$ является обратной операции \circ в том и только в том случае, если каждое из уравнений $a \circ x = c$ и $x \circ a = c$ имеет единственные и совпадающие решения при любых c и a из множества A . Это решение записывается как $x = c * a$.

В случае, если решения данных уравнений существуют не для любых пар a, c из A , операция $*$ называется *частичной*. Так как равенство

$b + (a - b) = a$ означает, что $a \geq b$, то операция вычитания на множестве натуральных чисел является частичной. Также частичной является и операция деления натуральных чисел, так как равенство $(a : b) \cdot b = a$ означает, что a должно находиться в ряду $0 \cdot b, 1 \cdot b, 2 \cdot b, \dots$.

Естественно поставить вопрос о существовании операций, обратных вычитанию и делению, хотя бы на таких числовых множествах, на которых каждая из них не является частичной. Для этого, согласно определению обратной операции, надо рассмотреть уравнения $a - x = b$ и $x - a = b$. Из первого уравнения получаем $x = a - b$, из второго $x = a + b$. Так как $a - b \neq a + b$ для любых a и b , то заключаем, что операции обратной вычитанию, не существует.

Аналогично для деления. Уравнения $a : x = b$ и $x : a = b$ имеют решения $x = a : b$ и $x = a \cdot b$ соответственно. Следовательно, не существует операции, обратной делению.

К сожалению, в школьных учебниках, и не только в школьных, можно встретить утверждения, что сложение и вычитание, умножение и деление — взаимнообратные операции. Что совершенно неверно.

Из определения вычитания и деления, а также из свойств сложения и умножения можно вывести свойства вычитания и деления.

Покажем, как это можно сделать.

2.1. $a - 0 = a$ при всяком натуральном a .

Так как $a + 0 = a$, то по определению вычитания имеем $a - 0 = a$.

2.2. $a : 1 = a$ при всяком натуральном a .

Также следует из $a \cdot 1 = a$ и определения деления.

2.3. Деление на нуль невозможно.

Допустим, что деление возможно. Тогда существует такое b , что $a : 0 = b$. Отсюда следует, что $0 \cdot b = a$. Но $0 \cdot b = 0$ для всякого b . Следовательно, при $a \neq 0$ такого b не существует. Если же $a = 0$, то в качестве b можно взять любое число, что невозможно, так как нарушается единственность операции деления.

2.4. $(a + b) - a = b$.

2.5. $(a \cdot b) : a = b$.

Каждое из этих утверждений означает, в силу определения обратной операции, что $a + b = b + a$ и $a \cdot b = b \cdot a$. Что справедливо.

2.6. $b + (a - b) = a$.

2.7. $b \cdot (a : b) = a$.

Каждое из этих утверждений непосредственно следует из определения обратной операции.

2.8. $a - (a - b) = b$.

2.9. $a : (a : b) = b$.

Докажем 2.8. Данное равенство означает, что $a = b + (a - b)$. А это равенство верно.

Аналогично для равенства 2.9.

2.10. $a + (b - c) = (a + b) - c$.

2.11. $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$.

Докажем свойство 2.10. Обозначим $b - c = x$, $(a + b) - c = y$. Тогда доказываемое равенство принимает вид $a + x = y$.

Из принятых обозначений, по определению вычитания, следует $b = c + x$, $a + b = c + y$. Подставляя во второе из этих равенств вместо b , равное ему $c + x$, получаем

$$a + (c + x) = c + y.$$

Отсюда, по свойству ассоциативности и сократимости сложения,

$$a + x = y,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство 2.11 аналогично, если везде поменять знаки «+» на «·», а «-» на «:».

$$2.12. a - (b + c) = (a - b) - c.$$

$$2.13. a : (b \cdot c) = (a : b) : c.$$

Докажем 2.13. Введем обозначения: $a : (b \cdot c) = x$, $(a : b) : c = y$. Требуется доказать, что $x = y$.

Из принятых обозначений имеем $a = (b \cdot c) \cdot x$, $a : b = c \cdot y$ или $a = b \cdot (c \cdot y)$. Приравнявая выражения для a , получаем

$$(b \cdot c) \cdot x = b \cdot (c \cdot y).$$

Отсюда, в силу свойств ассоциативности и сократимости умножения, $x = y$.

$$2.14. a - a = 0.$$

$$2.15. a : a = 1.$$

$$2.16. 0 : a = 0.$$

Свойства 2.14 – 2.16, очевидно, следуют из определения обратных операций и соответствующих свойств прямых.

$$2.17. (a - b) : c = (a : c) - (b : c).$$

Это свойство естественно назвать правой дистрибутивностью деления относительно вычитания.

Докажем его. Обозначим $(a : c) - (b : c) = x$. Тогда требуется доказать, что $(a - b) : c = x$.

Из принятого обозначения следует $a : c = (b : c) + x$. Умножим обе части последнего равенства на c , тогда имеем

$$(a : c) \cdot c = (b : c) \cdot c + (x \cdot c).$$

Так как, по определению деления, $(a : c) \cdot c = a$, то

$$a = (b : c) \cdot c + (x \cdot c)$$

в силу дистрибутивности умножения относительно сложения.

Но $(b : c) \cdot c = b$, поэтому $a = b + (x \cdot c)$.

Последнее равенство означает, что $a - b = x \cdot c$, откуда

$(a - b) : c = x$. Что и требовалось доказать.

$$2.18. (a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c).$$

Это свойство дистрибутивности умножения относительно вычитания.

Доказательство. Так как $b + (a - b) = a$, то $(b + (a - b)) \cdot c = a \cdot c$. Отсюда

$(b \cdot c) + (a - b) \cdot c = a \cdot c$, что означает

$$(a - b) \cdot c = (a \cdot c) - (b \cdot c).$$

Заметим, что в силу коммутативности умножения, справедливо также и свойство левой дистрибутивности умножения относительно вычитания, т.е. $c \cdot (a - b) = (c \cdot a) - (c \cdot b)$. И, в то же время, левая дистрибутивность деления относительно вычитания, так же как и относительно сложения, не имеет места.

В чем легко убедиться из следующих примеров:

$$36 : (12 + 6) = 36 : 18 = 2, \text{ но}$$

$$(36 : 12) + (36 : 6) = 3 + 6 = 9.$$

Отметим также, что все рассмотренные выше свойства вычитания и деления имеют место в предположении, что указанные разности и частные существуют.

При изучении системы натуральных чисел на основе аксиом Пеано мы видели, что особую роль в этой системе играет аксиома индукции. Имеет ли место соответствующее утверждение при данном подходе к изучению системы натуральных чисел?

Вначале отметим, что в подмножестве натуральных чисел, больших, чем некоторое фиксированное a , число $a + 1$ является наименьшим. Это следует из свойства 8 и если $b > a$, то $b = a + x$, где $x \neq 0$, а значит, $x \geq 1$, то $a + 1 \leq a + x = b$, т.е. $a + 1 \leq b$. Но, в силу дискретности порядка, между числами a и $a + 1$ не существует никакого натурального числа, то $a + 1$ наименьшее в этом подмножестве натуральных чисел.

Также имеет место утверждение: для всякого натурального $a > 1$, в подмножестве натуральных чисел, меньших чем a , число $a - 1$ является наибольшим.

Действительно, если $b < a$, то предположение $b > a - 1$ приводит к противоречию, так как, по доказанному выше следует, что $b \geq (a - 1) + 1 = a$. Значит, $b \leq a - 1$.

Покажем теперь, что если A такое подмножество натуральных чисел, которое удовлетворяет условиям:

1) $0 \in A$.

2) Вместе со всяким $a \in A$ подмножество A содержит также число $a + 1$, то A совпадает со всем множеством натуральных чисел.

Допустим *противное*, т.е. положим, что существуют натуральные числа, не принадлежащие A . В множестве этих чисел существует наименьшее. Пусть это a . Число $a \neq 0$, так как 0 принадлежит A по условию. Следовательно, $a - 1$ принадлежит множеству натуральных чисел и не может принадлежать подмножеству тех чисел, которые не входят в A , так как $a - 1 < a$, т.е. $a - 1 \in A$. Но тогда, в силу условия 2), $(a - 1) + 1 = a$ также принадлежит A . Итак, получаем, что $a \notin A$ и $a \in A$.

Таким образом, в системе натуральных чисел, описываемой на основе свойств 1-10, аксиома индукции имеет место. Фактически это означает, что свойства 1-10 определяют ту же систему, что и аксиомы Пеано и могут рассматриваться как аксиомы. Принципиальное отличие состоит в том, что при таком определении натуральных чисел природа элементов, составляющих данное множество, не имеет значения. Они определяются только как объекты, удовлетворяющие отношениям, свойства которых и описаны в аксиомах. С логической точки зрения это значит, что вместо того чтобы находить элементы путем соглашения или конструктивно, структурное определение состоит в том, чтобы характеризовать их путем операторных взаимоотношений, определяющих их функции в системе.

С точки зрения психологии математической мысли описанные подходы к определению математических объектов приводят к поиску ответа

на вопрос: является ли математика результатом работы мысли, т.е. изобретением, либо идеальные математические объекты действительно существуют и разум открывает их. Ясно, что ответ на этот вопрос влияет и на педагогику математики. На первый взгляд история математики свидетельствует о том, что математика есть открытие. Действительно, аксиоматический метод и позднее как бы индуктивное открытие фундаментальных математических структур явились результатом длительного процесса становления и развития математического знания.

В то же время целый ряд выдающихся математиков (*А. Пуанкаре, Ж. Адамар* и др.), интересовавшихся психологией математического творчества, убеждены в том, что математика есть изобретение. Ж. Пиаже, исследуя развитие арифметических и геометрических операций в сознании ребенка, пришел к выводу, что в процессе такого развития обнаруживается вначале «фундаментальная тенденция к организации целого или системы, вне которой элементы не имеют ни значения, ни существования, а затем распределение этих систем совокупностей по трем типам, которые в точности соответствуют структурам алгебраическим, структурам порядка и топологии»¹. Позднее возникновение математических структур, согласно Ж. Пиаже, обусловлено тем, что «порядок осознания противоположен порядку генезиса: то, что является первым в порядке сознания, будет последним в рефлексивном анализе, потому что субъект осознает результаты умственных построений до того, как они постигаются внутренними механизмами»². Это значит, что познание переходит от простого к сложному и от общего к частному одновременно.

Отсюда следует, что знакомство младших школьников со свойствами арифметических действий является не только условием формирования у детей представлений о математических методах, но и способствует развитию их познавательной сферы.

Здесь трудно удержаться от следующей цитаты: «Большая иллюзия считать термин просто соединением определенного звука с определенным понятием. Определять его таким образом — значит верить, будто можно начинать с терминов и строить систему, тогда как, напротив, лишь от цельного единства следует исходить, чтобы посредством анализа определить обнимаемые им элементы»³. Но тот факт, что язык есть система и является изобретением, ни у кого не вызывает сомнения. Системность языка наводит на мысль, что человеческое мышление также предпочитает системность.

Перейдем теперь к описанию того, как можно познакомить детей со свойствами арифметических действий, не претендуя на бесспорное решение.

Пример 1

1.1. В одной коробке a карандашей, в нее добавили b карандашей. В другой коробке b карандашей, в нее добавили еще a карандашей. Запи-

¹ Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. — М., 1960. — С. 12.

² См. там же.

³ Соссюр Ф. Курс общей лингвистики. — М., 1933.

2.7. Найди сумму $10 + 7 + 20 + 13 + 9$ (основание 10).

2.8. Сравни выражения:

$a + (b + c)$, $b + (a + c)$, $b + (c + a)$, $(a + c) + b$, $b + a + c$, $c + a + b$.

Какие верные равенства можно записать?

Пример 3

3.1. Ваня построил своих солдатиков в b рядов по a солдатиков в каждом, а Петя построил своих солдатиков в a рядов по b солдатиков в каждом. Сравни количества солдатиков у Вани и Пети с помощью рисунка 145.

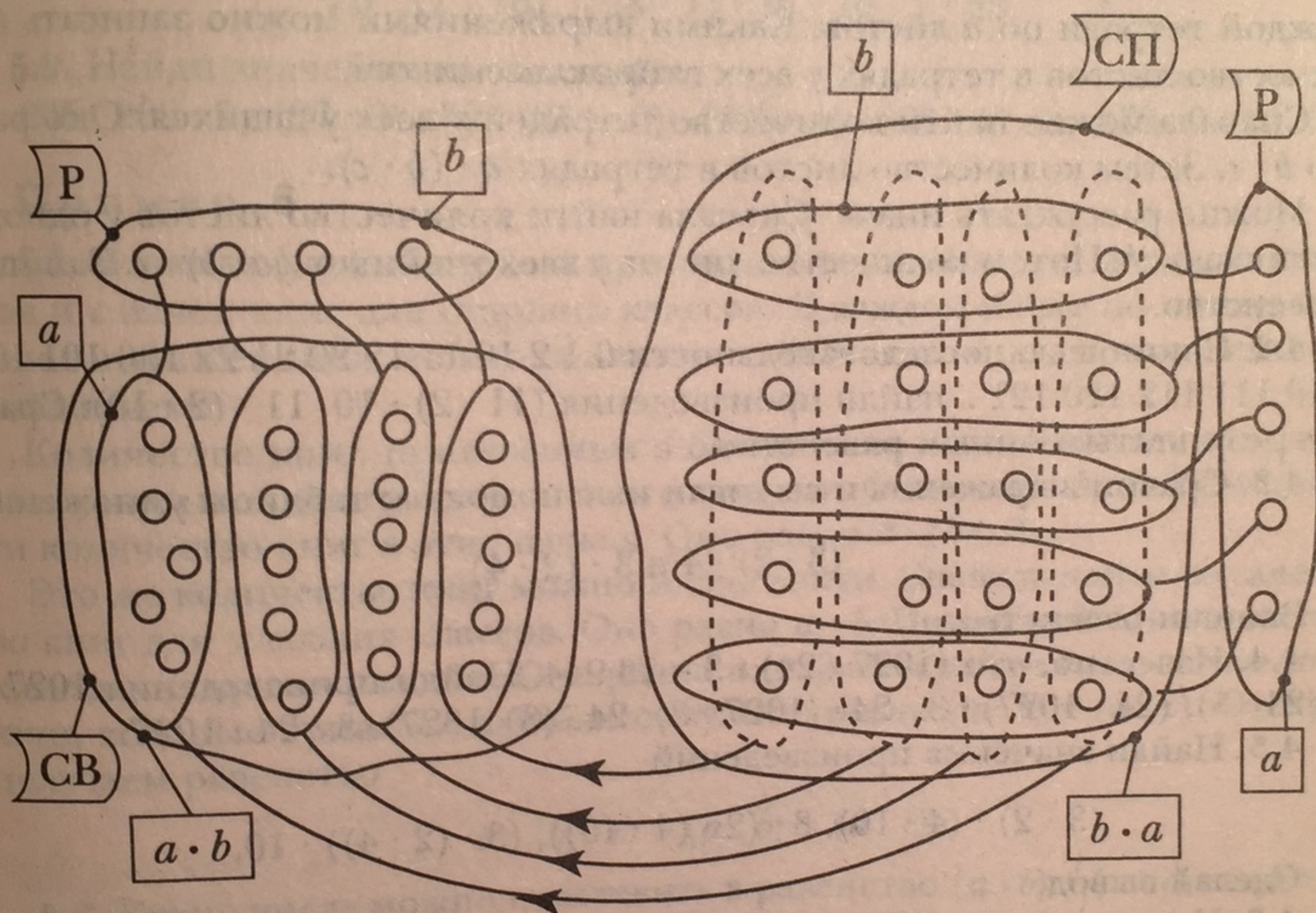


Рис. 145

Какое равенство можно записать? Запиши его.

3.2. Какими двумя выражениями можно записать количество конфет в b подарках, если в каждом подарке по a конфет?

Рассуждай так: в каждом подарке a конфет, всего подарков b . Конфет во всех подарках $a \cdot b$.

Можно иначе рассуждать. Возьмем по одной конфете из каждого подарка, получим b конфет. Затем возьмем еще по одной конфете из каждого подарка, снова получим b конфет. Так будем брать по одной конфете, пока их не останется. Так как подарков было b , то по одной конфете из каждого взяли b конфет. Получили по b конфет a раз. Значит, всего $b \cdot a$ конфет.

Запиши равенство.

3.3. С помощью последовательности 0 1 2 10 11 12 20 21 22 100 101... найди произведения $2 \cdot 12$ и $12 \cdot 2$. Запиши равенство.

3.4. Сравни произведения $3174 \cdot 586$ и $586 \cdot 3174$. Запиши равенство.

3.5. Какие числа можно поставить вместо a и b в равенство $a \cdot b = b \cdot a$ так, чтобы равенство было верным? Возьми какие-нибудь числа и проверь себя.

3.6. Петя умножил 134 на 25 и получил 3350, а Катя, умножив 25 на 134, получила 2350. Что можно сказать, ничего не вычисляя, о действиях Пети и Кати?

3.7. Известно, что $128 \cdot 456 = 58\,368$. Чему равно произведение $456 \cdot 128$?

Пример 4

4.1. Во втором классе c учеников. У каждого ученика по b тетрадей. В каждой тетради по a листов. Какими выражениями можно записать количество листов в тетрадях у всех второклассников?

Сначала можно найти количество тетрадей у всех учащихся. Оно равно $b \cdot c$. Затем количество листов в тетрадях $a \cdot (b \cdot c)$.

Можно рассуждать иначе. Сначала найти количество листов у одного ученика $a \cdot b$. Потом количество листов у всех учеников $(a \cdot b) \cdot c$. Запиши равенство.

4.2. С помощью последовательности 0 1 2 10 11 12 20 21 22 100 101 102 110 111 112 120 121... найди произведения $(11 \cdot 2) \cdot 10$, $11 \cdot (2 \cdot 10)$. Сравни результаты. Запиши равенство.

4.3. Сравни выражения и вычисли их с помощью таблицы умножения

$$(3 \cdot 2) \cdot 4 \text{ и } 3 \cdot (2 \cdot 4).$$

Запиши равенство.

4.4. Известно, что $(1027 \cdot 24) \cdot 3 = 73\,944$. Найди произведения $1027 \times (24 \cdot 3)$, $(24 \cdot 1027) \cdot 3$, $24 \cdot (1027 \cdot 3)$, $24 \cdot (3 \cdot 1027)$, $3 \cdot 24 \cdot 1027$.

4.5. Найди значения произведений

$$(3 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 10), 3 \cdot (2 \cdot (4 \cdot 10)), (3 \cdot (2 \cdot 4)) \cdot 10.$$

Сделай вывод.

4.6. Известно, что $(27 \cdot 4) \cdot (2 \cdot 3) = 648$. Найди произведения $27 \cdot (4 \cdot (2 \cdot 3))$, $(27 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 4)$, $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 27$.

Пример 5

5.1. В одной вазе a яблок, а другая — пустая. Каким выражением можно записать количество яблок в обеих вазах? Чему равно значение этого выражения? Запиши равенство.

5.2. Найди значения сумм:

$$12 + 0, 0 + 271, 3 + 0 + 2.$$

5.3. На a тарелках лежат по одному пирожку. Каким выражением можно записать количество всех пирожков на тарелках? Чему оно равно? Запиши равенство.

5.4. С помощью последовательности 0 1 2 10 11 12 20 21 22 ... найди произведения $1 \cdot 12$ и $12 \cdot 1$. Запиши равенство.

5.5. В каждой из a корзин нет ни одного яблока. Можно сказать, в каждой корзине 0 яблок. Каким выражением можно записать количество яб-

лок в этих корзинах? Чему равно его значение? Запиши равенство.

5.6. Найди значения выражений:

$$0 \cdot 29, 0 \cdot 284, 0 \cdot (327 \cdot 46), 0 \cdot (27 \cdot (386 \cdot 12)), (0 \cdot 504) \cdot 47.$$

5.7. Чтобы произведения $a \cdot b$ и $b \cdot a$ были равны при любых числах, подставляемых вместо a и b , нужно произведение $a \cdot 0$ положить равным произведению $0 \cdot a$. Так как $0 \cdot a = 0$, то и произведение $a \cdot 0$ также всегда считается равным 0. Надо запомнить, что $a \cdot 0 = 0$.

5.8. Известно, что $28 \cdot 16 = 448$. Найди произведения:

$$28 \cdot (1 \cdot 16), (28 \cdot 1) \cdot 16, 16 \cdot 1 \cdot 28.$$

5.9. Найди значения выражений:

$$0 \cdot 205, 205 \cdot 0, (27 \cdot 0) \cdot 39, (254 \cdot 0) \cdot (328 \cdot 4), 325 \cdot 15 \cdot 0, 278 \cdot 0 \cdot 14 \cdot 38.$$

Пример 6

6.1. В школьную библиотеку привезли b пачек книг для младших классов и c пачек книг для старших классов. В каждой пачке по a книг. Какими выражениями можно записать количество книг, привезенных в библиотеку?

Количество книг, привезенных в библиотеку, можно найти, если сначала узнать количество всех пачек с книгами. Оно равно $b + c$. Затем найти количество книг в этих пачках. Оно равно $a \cdot (b + c)$.

Это же количество книг можно иначе найти. Сначала найти количество книг для младших классов. Оно равно $a \cdot b$. Потом найти количество книг для старших классов. Оно равно $a \cdot c$. Затем найти количество всех книг, которые привезли в библиотеку. Оно равно $(a \cdot b) + (a \cdot c)$. Отсюда получаем равенство

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c).$$

6.2. Какие числа можно подставить в равенство $(a \cdot b) + (a \cdot c) = a(b + c)$ так, чтобы равенство было верным? Возьми какие-нибудь числа и проверь себя.

6.3. Известно, что $(3 \cdot 17) + (3 \cdot 24) = 123$.

Найди значения выражений:

$$3 \cdot (17 + 24), (17 \cdot 3) + (24 \cdot 3), (3 \cdot 17) + (24 \cdot 3), (24 + 17) \cdot 3.$$

6.4. Вычисли $32 \cdot (2 + 5 + 3)$.

Найди значения выражений:

$$(32 \cdot 2) + (32 \cdot 5) + (32 \cdot 3), (32 \cdot 5) + (32 \cdot 3) + (2 \cdot 32), (3 \cdot 32) + 32 \cdot (5 + 2).$$

6.5. Вычисли $(17 \cdot 28) + (17 \cdot 24) + (17 \cdot 48)$.

Пример 7

7.1. У Маши и Пети по a книг. Маше подарили еще b книг, а Пете — c книг. У кого из них книг больше, если Пете подарили больше книг, чем Маше, т.е. $c > b$. Какими выражениями можно записать новое количество книг у Пети и Маши? Запиши эти выражения. Сравни их. Запиши неравенство.

7.2. С помощью последовательности 0 1 2 3 4 10 11 12 13 14 20 21 22 23 24 30 31 32 33 34 40 ... найди сумму $11 + 21$. Поставь знак неравенства $11 + 21 \dots 21, 11 + 21 \dots 11$.

7.3. Сравни выражения $a + 1$ и $a + 2$. Запиши неравенство.

7.4. Сравни выражения a и $a + b$. Каким числом нужно заменить b в выражении $a + b$, чтобы выполнялось равенство $a + b = a$.

7.5. Из выражений $1023 + 4$, $1023 + 12$, $1023 + 1$, $1023 + 0$ выбери то, значение которого больше всех, меньше всех.

7.6. Известно, что $a > b$. Сравни суммы $a + c$ и $b + c$. Запиши неравенство.

7.7. У Кати b коробок с карандашами, а у Вани c коробок. У Кати коробок с карандашами больше, чем у Вани, т.е. $b > c$.

В каждой коробке по a карандашей. Запиши количество карандашей у Кати и Вани. Сравни эти количества. Запиши неравенство.

7.8. Из выражений $67 \cdot 5$, $67 \cdot 8$, $67 \cdot 12$, $67 \cdot 0$ выбери то, значение которого больше всех, меньше всех.

7.9. Известно, что $a > b$. Сравни $a \cdot c$ и $b \cdot c$. При каком значении c эти выражения равны?

Пример 8

8.1. У Маши a конфет. Она отдала Кате b конфет. Сравни количества a и b . Каким выражением надо записать количество конфет, которое осталось у Маши? Запиши это выражение.

Что означает выражение $a - 0$? $a - a$? Чему равно каждое из них? Могла ли Маша отдать $a + 1$ конфету? $a + 2$ конфеты?

Запиши выражением количество конфет, которое стало у обеих девочек. Найди его значение и запиши равенство. Объясни, почему $a + (a - b) = a$.

8.2. Разность $a - b = c$. Найди, чему равно a , чему равно b .

8.3. Сумма $a + b = c$. Запиши еще два верных равенства.

8.4. Найди значения выражений $269 + 58$, $327 - 269$, если $327 - 58 = 269$.

8.5. В двух вазах яблоки. В первой a яблок, во второй вазе b яблок. Из второй вазы взяли c яблок. Запиши выражением количество оставшихся яблок.

Каким выражением нужно записать количество оставшихся яблок, если c яблок взяли из обеих ваз? Запиши это выражение.

Сравни оба выражения и запиши равенство.

Какое равенство надо записать, если c яблок взяли из первой вазы?

8.6. Запиши выражения, равные $a + (b - c)$.

8.7. Вычисли $(27 + 12) - 7$ двумя разными способами.

8.8. Книгу, в которой a страниц, читают Маша и Петя. Маша прочитала сначала b страниц, потом еще c страниц. Запиши выражением количество страниц, которые осталось прочитать Маше.

Петя сразу прочитал столько страниц, сколько Маша в два приема. Запиши выражением количество страниц, которые осталось прочитать Пете. Сравни оба выражения. Запиши равенство.

8.9. Запиши выражение, равное $(a - b) - c$.

8.10. Вычисли двумя способами:

$$16 - (9 + 4); (12 - 5) - 2.$$

Пример 9

9.1. В магазин привезли b пачек учебников по a учебников в каждой пачке, а пачек со справочниками на c меньше, чем пачек с учебниками. В каждой пачке справочников столько же, сколько и в пачке с учебниками.

Запиши двумя различными выражениями количество справочников, которые привезли в магазин.

Количество справочников можно так найти. Сначала найдем количество пачек со справочниками. Оно равно $b - c$. Затем количество справочников в этих пачках. Оно равно $a(b - c)$.

Можно иначе рассуждать. Сначала найдем количество учебников. Оно равно $a \cdot b$. Потом количество, на которое справочников меньше, чем количество учебников. Оно равно $a \cdot c$. Тогда количество справочников равно $(a \cdot b) - (a \cdot c)$. Запиши равенство.

9.2. Запиши выражение, равное $(a \cdot b) - (a \cdot c)$.

9.3. Вычисли двумя разными способами

$$5 \cdot (6 - 4); (8 \cdot 9) - (8 \cdot 7); (3 \cdot 17) - (2 \cdot 17).$$

9.4. Малышам раздали a яблок по b каждому. Запиши выражением количество детей, получивших яблоки. Используя это выражение, запиши количество всех яблок, которые были розданы. Чему это количество равно? Запиши равенство.

9.5. Запиши выражения, равные a и b , если $a \cdot b = c$.

9.6. Найди, чему равны частные:

$$0 : a, a : 1, a : a,$$

если известно, что $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$.

9.7. Какое число можно поставить в равенство $a : 0 = b$ вместо b так, чтобы равенство было верным?

Рассуждай так: b — это такое число, умножая которое на 0, получаем a . Но, умножая на 0, всегда получаем 0. Значит, на 0 делить нельзя.

9.8. Запиши выражения, равные a и b , если $a : b = c$.

9.9. Известно, что $28 \cdot 16 = 448$. Найди частные $448 : 16$, $448 : 28$.

9.10. Известно, что $518 : 37 = 14$. Найди частное $518 : 14$ и произведение $37 \cdot 14$.

Пример 10

10.1. В школу сначала привезли a стульев, потом — b стульев. Все стулья поставили в c классов поровну в каждый.

Запиши двумя разными выражениями количество стульев в каждом классе.

Количество стульев в каждом классе можно найти, если сначала найти количество всех стульев, привезенных в школу. Оно равно $a + b$. Затем найти количество стульев в каждом классе. Оно равно $(a + b) : c$.

Количество стульев в каждом классе можно и по-другому найти, если сначала вычислить количество стульев в каждом классе, которое получилось, когда расставили a стульев. Потом найти количество стульев в каж-

дом классе, когда расставили b стульев. Тогда количество всех стульев в каждом классе запишется выражением

$$(a : c) + (b : c).$$

Запиши равенство.

10.2. Запиши выражение, равное данному $(a : c) + (b : c)$.

10.3. Вычисли двумя различными способами:

$$(12 + 36) : 3; (28 + 56) : 7; 84 : 6.$$

10.4. Запиши выражения, равные данным:

$$(121 : 11) + (44 : 11), (96 + 64) : 4.$$

10.5. В школьной столовой испекли a пирожков. Из них b пирожков поровну раздали c детям на завтрак, а оставшиеся пирожки раздали поровну на обед.

Какими выражениями можно записать количество пирожков, которые получил на обед каждый ребенок?

Количество пирожков, которые получил каждый ребенок на обед, можно найти, если сначала найти количество оставшихся на обед пирожков. Оно равно $a - b$. Затем найти количество пирожков, которые получил каждый ребенок в обед. Оно равно $(a - b) : c$. Это же количество пирожков можно и по-другому найти, если сначала найти то количество пирожков, которые получил каждый ребенок всего на завтрак и обед. Оно равно $a : c$. Потом найти количество пирожков, которые получил каждый ребенок на завтрак. Оно равно $b : c$. Тогда количество пирожков, полученных каждым из них на обед, равно $(a : c) - (b : c)$. Запиши равенство.

10.6. Запиши выражение, равное данному $(a : c) - (b : c)$.

10.7. Вычисли двумя разными способами:

$$(27 - 9) : 3; (84 - 60) : 12; 98 : 7.$$

10.8. Запиши выражения, равные данным:

$$(250 : 5) - (30 : 5), (111 - 27) : 3.$$

§ 8. Текстовые арифметические задачи

Текстовая арифметическая задача — это прежде всего описание на естественном языке некоторого фрагмента объективной действительности. Но всякое естественноречевое описание является не столько отражением действительности как она есть сама по себе, сколько пониманием ее с той или иной точки зрения и сообщением этого понимания другому сознанию, т.е. представляет собой некоторую интерпретацию рассматриваемого фрагмента действительности. Текст задачи отличается от других естественноречевых текстов тем, что это текст-размышление, который требует его преобразования для достижения цели, поставленной в нем.

Суть требуемого преобразования, как правило, сводится к систематическому и сокращенному переводу. Оригинал не только переводится на

ульев в
другой язык, но и сокращается. Что-то теряется при таком сокращении, но все, что есть существенного в оригинале, представлено в переводе, сохраняющем все соотношения в сжатом виде. Такого рода преобразования принято называть *гомоморфизмом*. Ясно, что для такого преобразования необходимо не только понимание языка оригинала, но и определенный уровень владения тем языком, перевод на который осуществляется при данном преобразовании. В нашем случае это язык элементарной арифметики.

Из приведенного рассуждения следует, что поиск решения текстовой задачи, основной нерв которого составляет перевод естественного языка на математический язык, не может быть алгоритмизован, и именно перевод представляет наибольшую сложность при поиске решения, так как для его осуществления прежде всего нужно выявить значение, смысл, семантику текста, реконструировать или, как говорят психологи, репрезентировать гомоморфный образ описываемого текстом фрагмента действительности в сознании, а затем описать этот образ на математическом языке. Преобразование же полученного описания на математическом языке, во всяком случае в пределах школьной арифметики, не представляет особых трудностей.

Чтобы показать сложность перевода с естественного на математический язык, рассмотрим следующие примеры текстовых задач, математическое описание или математическая модель которых одна и та же.

1. Найдите сумму чисел 6 и 2.
2. У Кати 6 цветных и 2 простых карандаша. Сколько карандашей у Кати?
3. На одной полке 2 книги, на другой — 6. Сколько книг на двух полках?
4. У Пети было 6 марок. Ему подарили еще 2. Сколько теперь марок у Пети?
5. Ваня отдал 2 тетради Маше. У него еще 6 осталось. Сколько тетрадей было у Вани?
6. У Пети 6 солдатиков, а у Сережи на 2 больше. Сколько солдатиков у Сережи?
7. Маша дала 2 конфеты Кате и 6 конфет Пете. После этого у нее не осталось конфет. Сколько конфет было у Маши?
8. У Пети 6 солдатиков, их на 2 меньше, чем у Сережи. Сколько солдатиков у Сережи?
9. Петя играл с Ваней в морской бой, 2 партии он выиграл, а 6 проиграл. Сколько партий сыграл Петя?
10. На первом этапе компьютерной игры Саша набрал 6 очков, а на втором — 2. Сколько очков он набрал на двух этапах?
11. На первом этапе компьютерной игры Саша выиграл 6 очков. Он прошел второй этап и обнаружил, что за два этапа проиграл 2 очка. Каков результат игры Саши на втором этапе? (Сколько очков он проиграл на втором этапе?)

Легко видеть, что решения всех данных задач сводятся к нахождению суммы $6 + 2$. Тем не менее сложность их далеко не одинакова. Если для «отвлеченных» чисел первой задачи ее математическая модель непосредственно дана, то задача 2 уже требует умения выделить в описанной си-

туации ее существенные с точки зрения поставленной цели признаки, что неизбежно предполагает полное понимание текста. Именно в этом смысле текстовые задачи можно рассматривать как вариативные способы описания арифметических операций и отношений.

Существенную помощь в понимании отношений, описываемых в тексте, может оказать вспомогательное промежуточное описание их наглядным графическим образом. В задаче 2 такой графической моделью может быть модель, представленная на рисунке 146. Она такова, потому что

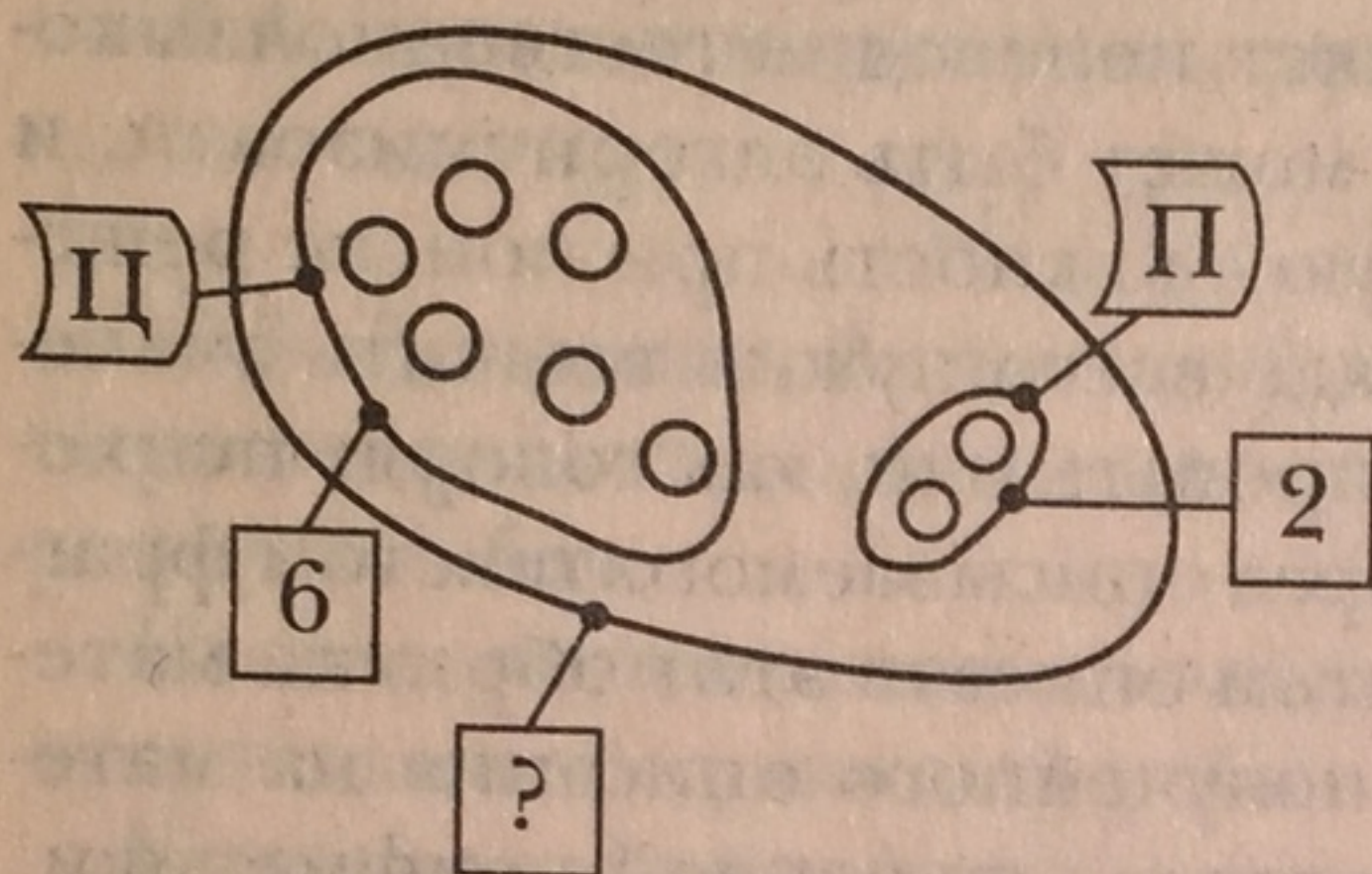


Рис. 146

семантический анализ текста показывает, что числовые характеристики рассматриваемой ситуации являются количественными числами. Перевод такого вспомогательного описания на собственно математический язык не представляет особых трудностей, если смысл сложения достаточно усвоен.

Особенность ситуации, рассматриваемой в этой задаче, состоит в том, что она стационарна, т.е. ее чис-

ловые характеристики выступают как характеристики состояния.

Задачу 3 отличает единственный нюанс: дважды встречающееся в тексте число 2, одно из которых может быть заменено словосочетанием «на этих полках».

В задаче 4 ситуация, описываемая в тексте, не является стационарной, она изменяется, причем число 6 является характеристикой ее начального состояния, а число 2 характеризует ее изменение. Требуется найти характеристику ее конечного состояния. Так как эти числовые характеристики — количественные числа, то вспомогательная графическая модель та же самая, что и в задаче 2.

Задачу 5 в методике принято относить к задачам на нахождение неизвестного уменьшаемого. Рассуждение, что если осталось 6, а отдали 2, то первоначально было столько, сколько осталось и сколько отдали, позволяет построить соответствующую графическую модель, совпадающую с графическими моделями в предыдущих задачах, так как числовые характеристики здесь также количественные числа.

В задаче 6 описывается отношение между числовыми характеристиками двух совокупностей. В методике такое отношение называется «больше на». Поэтому графическая модель здесь существенно иная. Она представлена на рисунке 147.

Задача 7 осложнена тем, что числовые характеристики ситуации являются характеристиками ее изменения, а требуется найти характеристику ее начального состояния. В то же время графическая модель здесь такая же, как и в задачах 2–5.

Задача 8 в методике относится к задачам в косвенной форме. Ее сложность не только в особом обороте речи, но обычно и провоцируется тем, что отношения больше и меньше рассматриваются как совершен-

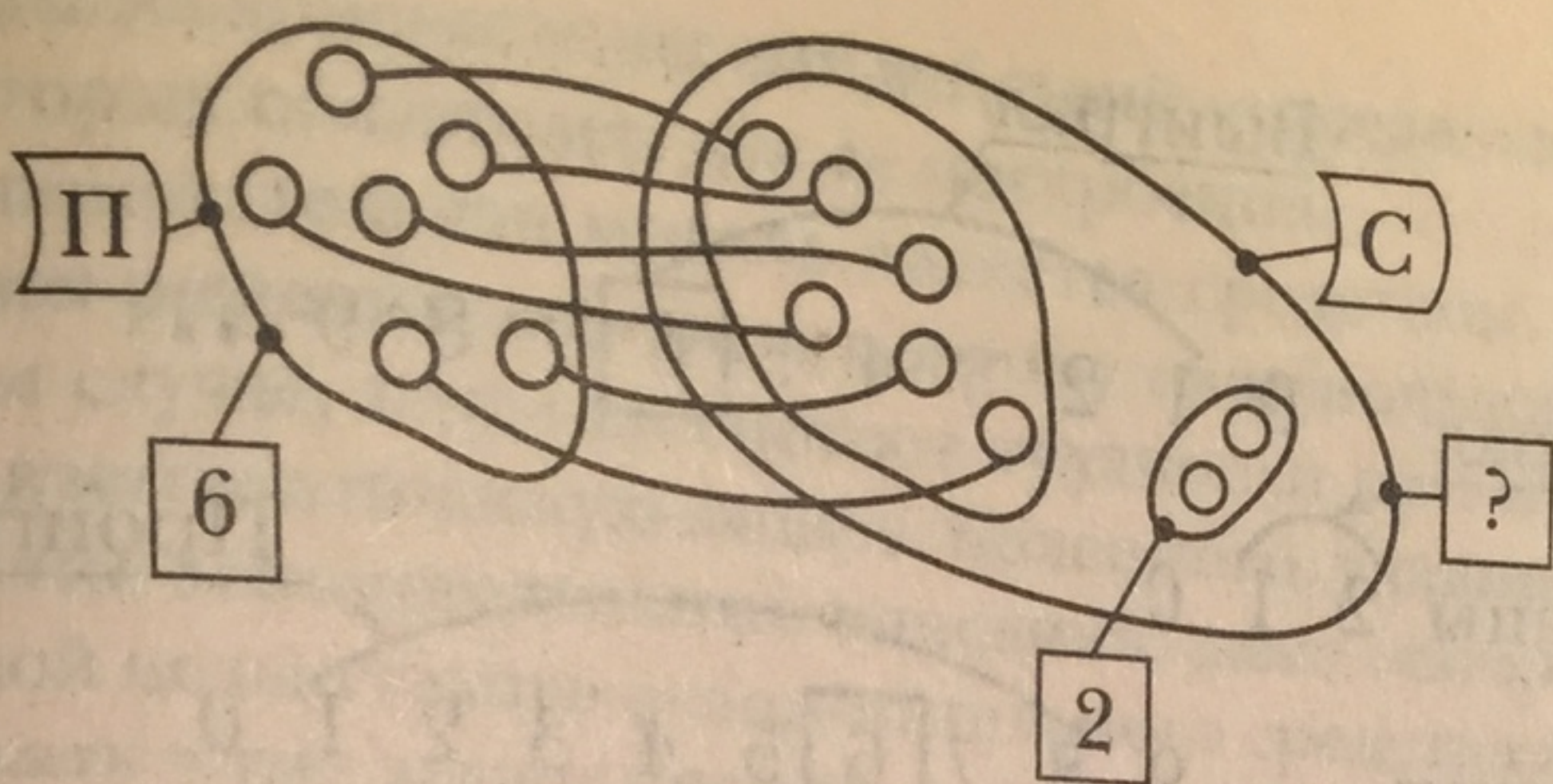
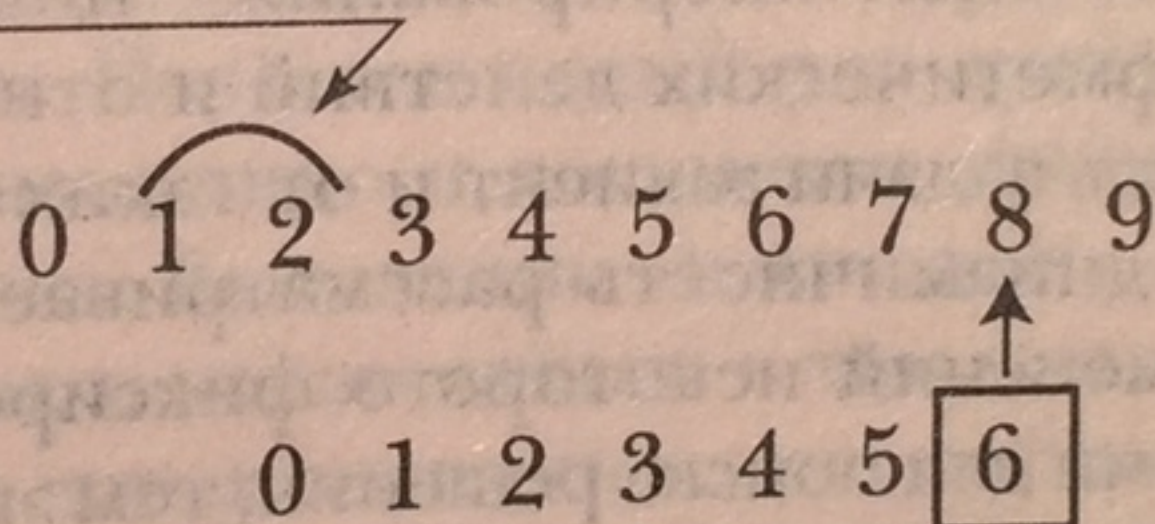


Рис. 147

но разные. Если же усвоено, что отношение $a > b$ на c означает то же, что и $b < a$ на c , то построение графической модели, совпадающей с моделью задачи 6, не представляет особых трудностей.

Отличие задачи 9 от всех предыдущих в том, что сыгранные партии не являются определенными физическими объектами. Каждая партия — это некоторый протекающий во времени процесс. Количество таких, следующих друг за другом, процессов можно представить в виде последовательности, нумерующей их. Тогда вспомогательная модель задачи может быть такой, как представлена на рисунке 148, так как число партий есть характеристика места в последовательности.

Партии выиграл



Партии проиграл

Рис. 148

Задачу 10 отличают те же особенности, что и задачу 9, но каждое очко есть результат некоторого процесса, значит, числа здесь так же выступают, как характеристики места в последовательности. Ее вспомогательная модель та же, что и в задаче 9.

Задача 11 наиболее сложная. Необходимое для поиска решения рассуждение оказывается трудным не только для первоклассников, но и для более старших школьников. Оно состоит в том, что если результатом двух этапов является проигрыш двух очков, а на первом 6 очков было выиграно, то на втором этапе надо проиграть все выигранные на первом этапе очки и дополнительно еще 2. Ясно, что числа тут характеризуют протекание процесса набора очков или их потери. То есть изменение начального состояния происходит в двух направлениях, а требуется найти не конечное состояние, а по конечному состоянию и первоначальному изменению отыскать то изменение, которое произошло во второй раз. Вспомогательная модель может быть такой, как на рисунке 149.

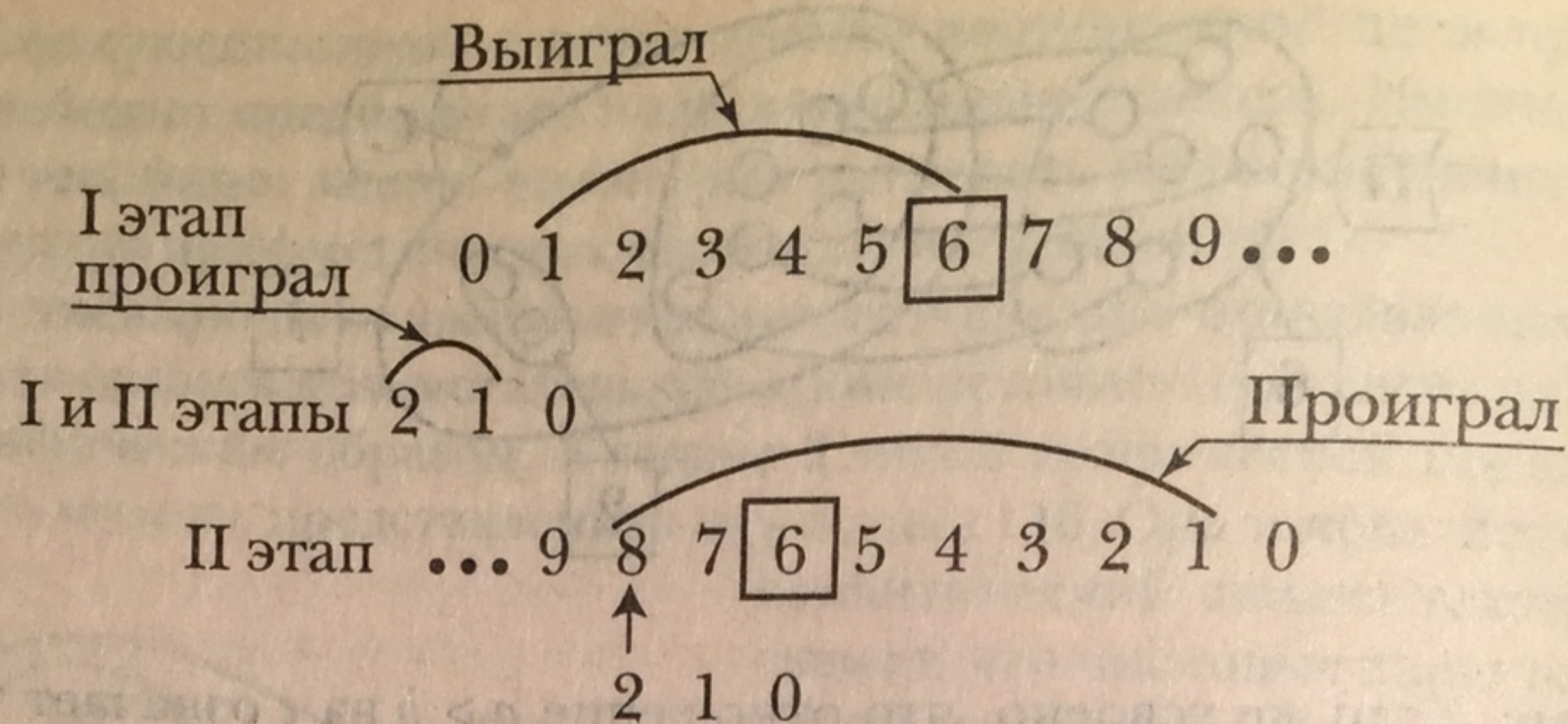


Рис. 149

Эти примеры показывают, что сложность текстовой задачи зависит не только от количественных характеристик рассматриваемых в условии ситуаций или процессов и отношений между ними, но и от их качественных характеристик. К качественным относятся, например, объекты, о которых идет речь в задаче. Если они мало знакомы учащимся, то осознать их количественные характеристики значительно труднее, чем в тех случаях, когда они легко представимы на основе имеющегося жизненного опыта. В то же время, строя математические модели хорошо знакомых ситуаций, ребенок познает их новые аспекты, тем самым расширяет не только опыт оперирования с ними, но и более глубоко усваивает смысл арифметических действий и отношений.

Сложность задачи зависит и от таких ее характеристик, как стационарность или динамичность рассматриваемых ситуаций и процессов. Чем больше изменений некоторого фиксированного состояния являются существенными для поиска решения, тем значительно возрастает сложность задачи, так как числовые данные показывают в этом случае меру изменчивости того или иного свойства, а не меру самого свойства. Например, в задаче 4 число 2 показывает меру изменения объекта, количественную характеристику которого требуется найти как результат такого изменения. А в задаче 9 оба числа являются мерой изменения, что усложняет ее.

Сложность преобразования текста задачи в математическую модель существенным образом зависит от тех рассуждений, которые следует провести в процессе поиска решения. Причем построение математической модели, т.е. правильный перевод естественного языка на математический язык возможен только в том случае, если в образном представлении фрагмента действительности, описанного в тексте, удастся отвлечься, абстрагироваться от всех несущественных, с точки зрения поставленной цели, характеристик. Количество нужных отвлечений также влияет на сложность задачи. Например, в задаче 1 совсем не требуется абстрагирование, а в задаче 2 необходимо абстрагироваться, так как речь идет о карандашах, а они различаются по таким характеристикам, которые несущественны для решения задачи. Графическая вспомогательная модель, являясь промежуточным звеном между текстом и математической моделью, также служит первым шагом абстракции. Причем такая модель строится как на основе семантического анализа текста, так и

на основе смысла арифметических действий, определенный уровень понимания которых обязателен для ее построения.

Любая вспомогательная модель является средством, призванным облегчить поиск решения задачи, и поэтому ее использование оправдано только в том случае, когда возникают трудности при переводе вербального текста в математическую запись. Более того, учащиеся могут использовать и другие вспомогательные описания, даже изобретенные ими самостоятельно. Главной целью такого вспомогательного средства является возможность удержать в уме задачу во всей ее полноте как нечто единое, помогающее производить мысленные преобразования возникшего образа. В идеале надо стремиться к тому, чтобы все вспомогательные средства выступали лишь как внутренние представления задачи. В процессе обучения следует достигнуть такого идеала для тех задач, которые, может быть, не совсем удачно, называют типичными. Они как раз и образуют тот фундамент, на котором строится поиск решения любых текстовых задач. Но, несмотря на то, что типичные задачи требуют только распознавания их типа, сам процесс распознавания не алгоритмизуем и требует определенных усилий, результат которых не может быть точно предвиден. Приведенные выше примеры показывают, что необходимым условием такого распознавания является понимание текста, выявления его семантики как языкового явления.

Подчеркнем еще раз, что одним из решающих этапов работы над задачей является этап анализа текста. Известен целый ряд приемов работы на этом этапе. Например, интонационно и логически правильное чтение текста, его переформулировка. Выделение «ключевых» слов. Выделение величин как известных, так и неизвестных, в том числе заданных неявно в задаче. Выделение известных величин и тех, которые требуется отыскать. Построение вспомогательной модели, в том числе краткая запись или таблица. Конечным итогом работы на этом этапе должна быть идея решения.

Ниже приведенные примеры показывают возможные пути организации познавательной деятельности школьников в этом направлении.

Пример 1

1.1. Перескажи следующий текст: «Дети играют во дворе. Среди них мальчики и девочки». Нарисуй «картинку».

Придумай похожий рассказ про автомобили на стоянке.

1.2. Перескажи текст: «Сначала Петя изготовил для елки несколько звездочек, а затем несколько флажков».

Изобрази этот текст с помощью последовательности:

О Т Т А Л П В С Р Е ...

Придумай подобный рассказ про то, как Маша читала книгу. Изобрази свой рассказ с помощью последовательности. Сравни изображения.

1.3. Перескажи текст: «Несколько чашек молока мама израсходовала на приготовление каши, а еще несколько чашек — на приготовление теста».

Изобрази это с помощью отрезков. Нарисуй отрезки, изображающие емкость одной чашки, емкости нескольких чашек молока для каши и для теста.

Придумай похожий рассказ про шаги Вани, если он шел от дома до школы мимо спортивной площадки. С помощью отрезков изобрази его путь. Сравни изображения.

1.4. Перескажи: «У школы растет a лип и b берез». Нарисуй картинку.

Ответь на вопросы:

— Что известно про количество лип у школы? про количество берез?

Придумай подобный рассказ про яблоки и груши, которые дали детям.

Нарисуй картинку.

1.5. Перескажи и нарисуй картинку: «В магазин привезли a мешков картофеля и b мешков моркови. Всего c мешков».

ОТВЕТЬ НА ВОПРОСЫ:

— Что известно о количестве мешков с картофелем; с морковью; всех мешков с овощами?

Придумай похожий рассказ о мальчиках и девочках в первом классе. Запиши выражения для a , b , c .

1.6. Знаком \forall последовательности $O \Gamma \Delta \forall \Lambda \Pi \Psi \Xi \dots$ Петя отметил число дней, которые он провел у бабушки. Остальные d дней каникул он был на экскурсии. Каким знаком отметил Петя число дней каникул? Запиши выражения для каждого отмеченного им знака.

Ответ на вопросы:

— Что известно о количестве дней, которые провел Петя у бабушки; которые он пробыл на экскурсии; на каникулах?

Придумай подобный рассказ о том, как Маша читала книгу и с помощью той же последовательности отмечала число прочитанных страниц.

1.7. Масса всей маминной покупки a кг. Ваня нес b кг, а мама c кг.

Нарисуй картинку, изображающую массы, о которых здесь сказано. Изобрази любым отрезком массу одного килограмма.

Ответь на вопросы:

— Что известно о массе всей маминой покупки; о массе, которую нес Ваня; о массе, которую несла мама?

Запиши выражения для a , b , c .

Придумай похожий рассказ про длину ленточки у Кати.

1.8. В вазе лежало a яблок. Из них b зеленых, а c красных.

Нарисуй картинку. Ответь на вопросы:

— Что известно о количестве яблок в вазе; о красных яблоках; о зеленых яблоках?

Сравни количества a и b ; a и c .

Ответ на вопросы:

— На сколько a больше, чем b ? b меньше, чем a ?

— На сколько a больше, чем c ? c меньше, чем a ?

Придумай подобный рассказ про грядки с луком и морковью.

1.9. У Кати было a воздушных шариков. b шариков она подарила Пете. У нее осталось c шариков.

Нарисуй картинку. Ответь на вопросы:

— Что известно о количестве шариков, которое было у Кати вначале; количество, которое она подарила; количество, которое у нее осталось; количество, которое было вначале у Пети; количество, которое у него

стало? На сколько больше шариков стало у Пети? На сколько меньше шариков стало у Маши?

Запиши выражения для a , b , c . Замени a , b и c какими-нибудь числами. Можно ли c заменить любым числом? Как найти это число? Можно ли b заменить любым числом? Каким оно должно быть?

Придумай похожий рассказ про запасные подшипники для велосипеда, которые были у Пети.

1.10. На одной полке a книг, на второй на b больше. Всего c книг. На третьей полке на b книг меньше, чем на первой, всего их d книг.

Сначала нарисуй книги на первой и второй полках, затем на первой и третьей полках. Ответь на вопросы:

— Что известно о количестве книг на первой полке; на второй полке; на третьей полке? На какой полке больше всего книг? Меньше всего?

— На сколько c больше, чем a ? На сколько a меньше, чем c ? На сколько a больше, чем d ? На сколько d меньше, чем a ?

Узнай, на сколько книг на третьей полке меньше, чем на второй? Каким выражением можно записать это количество?

Запиши выражения для a , b , c , d .

Замени a , b , c , d какими-нибудь числами. Какие числа нельзя взять любыми?

Придумай подобный рассказ про массу картофеля в трех мешках.

1.11. У Пети было a руб. Он хотел купить блокнот за b руб., но у него не хватило c руб.

Нарисуй картинку, изображающую количество рублей, о которых здесь сказано. Ответь на вопросы:

— Сколько денег было у Пети? Что известно о стоимости блокнота; о количестве денег, которых не хватило Пете на покупку?

— Какое из чисел a или b больше? На сколько b больше, чем a ? На сколько a меньше, чем b ?

Запиши выражения для a , b и c .

Придумай похожий рассказ про книги, которые Катя хотела взять с собой в школу.

1.12. Катя и Ваня читали книгу. Катя прочитала 12 страниц. Оказалось, что она прочитала на 3 страницы больше, чем Ваня.

Знаками последовательности 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ... отметь число прочитанных страниц Катей и Ваней.

Ответь на вопросы:

— Что известно о количестве страниц, прочитанных Катей; прочитанных Ваней?

— Кто из них прочитал больше страниц? На сколько больше прочитала страниц Катя, чем Ваня? На сколько меньше страниц прочитал Ваня, чем Катя?

— Каким выражением можно записать количество страниц, прочитанных Ваней? Запиши его.

Как по-другому можно сказать о прочитанных Ваней и Катей страницах? Составь такой рассказ.

Придумай подобный рассказ про длину ленточек у Маши и Лены.

1.13. Таня и Маша чистили картофель. Маша очистила 6 картофелин, что на 2 картофелины меньше, чем Таня.

Знаками последовательности 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... отметь число картофелин, очищенных девочками.

Ответь на вопросы:

— Кто из них, Маша или Таня, очистил больше картофелин? На сколько картофелин больше очистила Таня, чем Маша? На сколько картофелин меньше очистила Маша, чем Таня?

Придумай похожий рассказ про количество огурцов, собранных с двух грядок. Расскажи иначе обе эти истории.

1.14. На первой остановке в автобус вошли 4 пассажира. После второй остановки в автобусе на 2 пассажира стало меньше, чем было до первой остановки.

— Что произошло на второй остановке? (Пассажиры только выходили.)

Знаками последовательности 0 1 2 3 4 5 ... отметь, как изменялось число пассажиров в автобусе.

Сначала отметь число пассажиров, которые вошли на первой остановке. Так как пассажиры входили, то число пассажиров в автобусе увеличилось. Это можно так показать:

0 1 2 3 4 5 6 ...

На сколько уменьшилось пассажиров на второй остановке можно показать так:

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

2 1

Число пассажиров, которые вышли на второй остановке, можно так показать:

0 1 2 3 4 5 6 7 ...

2 1

↓
6 5 4 3 2 1 0

Каким выражением можно записать число пассажиров, которые вышли на второй остановке?

Придумай похожий рассказ про количество яблок в вазе, в которую сперва добавили яблоки, а после обеда их оказалось меньше, чем было сначала.

1.15. За весь день магазин продал 12 ящиков с апельсинами. В конце дня оказалось, что их количество уменьшилось на 4 по сравнению с тем, что было утром.

Как это могло произойти? (В течение дня в магазин привезли еще ящики с апельсинами.)

Знаками последовательности 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ... отметь, как изменялось число ящиков с апельсинами в магазине.

Каким выражением можно записать количество ящиков, которые привезли в магазин в течение дня?

Придумай похожий рассказ про конфеты, которые съела Маша.
 1.16. Автотурист выехал из города А в 6 ч утра. Через 2 ч пути он приехал в город В и обнаружил, что забыл карту шоссейных дорог. Он вернулся в город А и сразу вновь отправился в путь.

С помощью последовательности 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 ... отметь, в котором часу автотурист снова оказался в городе В.

Каким выражением можно записать это время суток?

Придумай похожий рассказ про Петю, который пошел в школу и забыл костюм для урока физкультуры.

Пример 2

2.1. В спортивном зале тренируется a команд. У каждой команды одно и то же количество мячей b . Всего у них c мячей.

Нарисуй картинку. Ответь на вопросы:

- Что известно о числе команд; мячей?
- В каком отношении находятся числа a , b , c ? Запиши выражения для a , b , c .
- Во сколько раз число всех мячей больше, чем число команд?
- Во сколько раз число всех мячей больше, чем число мячей у одной команды?
- Какие числа можно поставить вместо a , b , c ?
- Во сколько раз число команд меньше, чем число всех мячей?
- Во сколько раз число мячей у одной команды меньше, чем число всех мячей?

Продолжи рисунок:

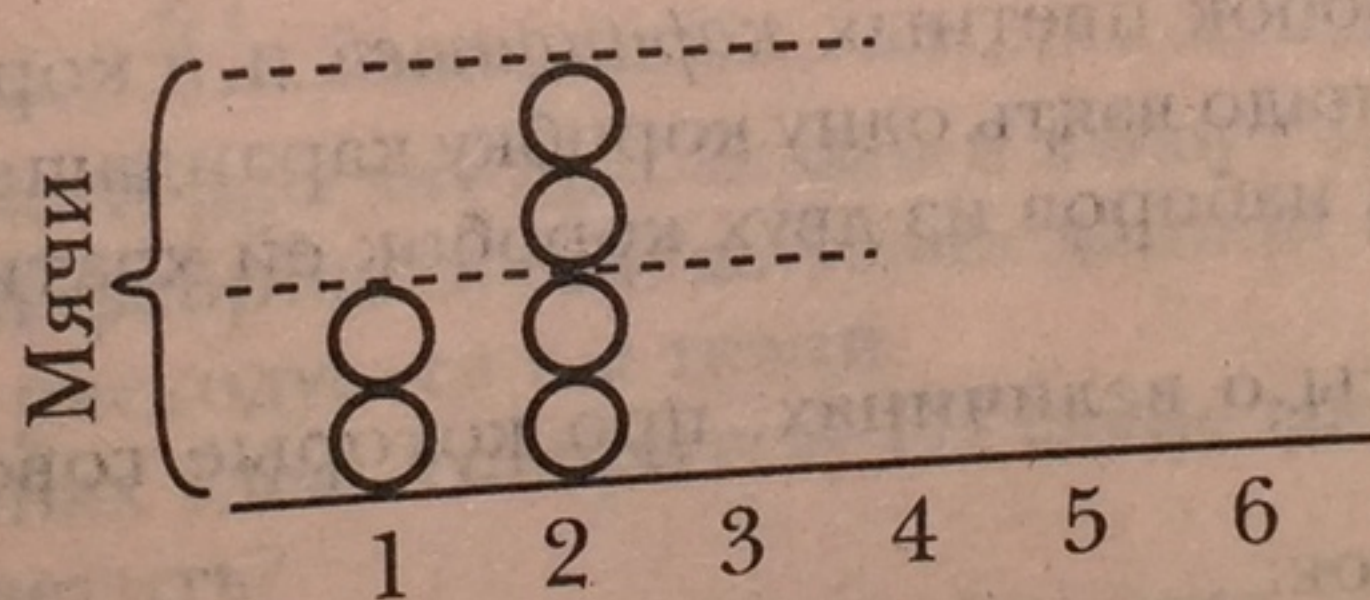


Рис. 150

Заполни таблицы:

Число команд	Число мячей
1	3
2	
3	
4	
5	
6	

Число мячей	Число команд
3	1
6	
9	
12	
15	
18	

Придумай рассказ про число редисок в пучках так, чтобы все величины находились в том же отношении, в каком находятся величины в этом рассказе.

2.2. У Пети a руб. Он купил b пакетиков орешков, каждый из которых стоит c руб. После чего у него не осталось денег.

Нарисуй картинку. На какие вопросы можно ответить о величинах, про которые говорится в рассказе?

Запиши выражения для a , b , c .

Какие числа можно поставить в каждое из этих выражений вместо a , b , c ?

Продолжи рисунок:

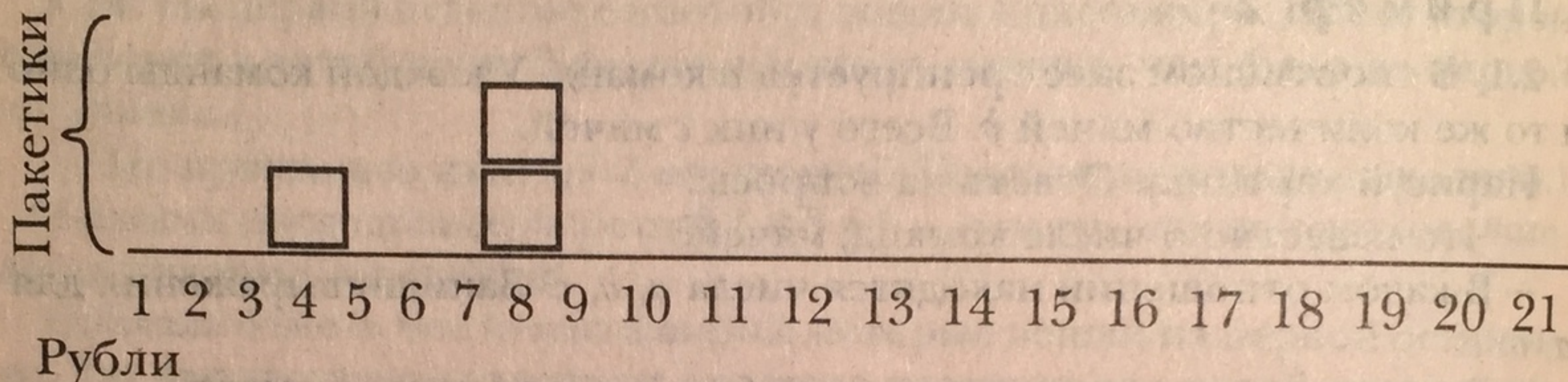


Рис. 151

Заполни таблицу:

Рубли	10	15	20	25	30	35	40
Пакетики	2						

Придумай такой рассказ про кроликов в клетках, чтобы все величины находились в том же отношении.

2.3. У Ани a коробок цветных карандашей и b коробок с гуашью. На урок рисования ей надо взять одну коробку карандашей и одну коробку с гуашью. Различных наборов из двух коробок ей хватило на c уроков рисования.

На какие вопросы о величинах, про которые говорится в рассказе, можно ответить?

Продолжи рисунок:

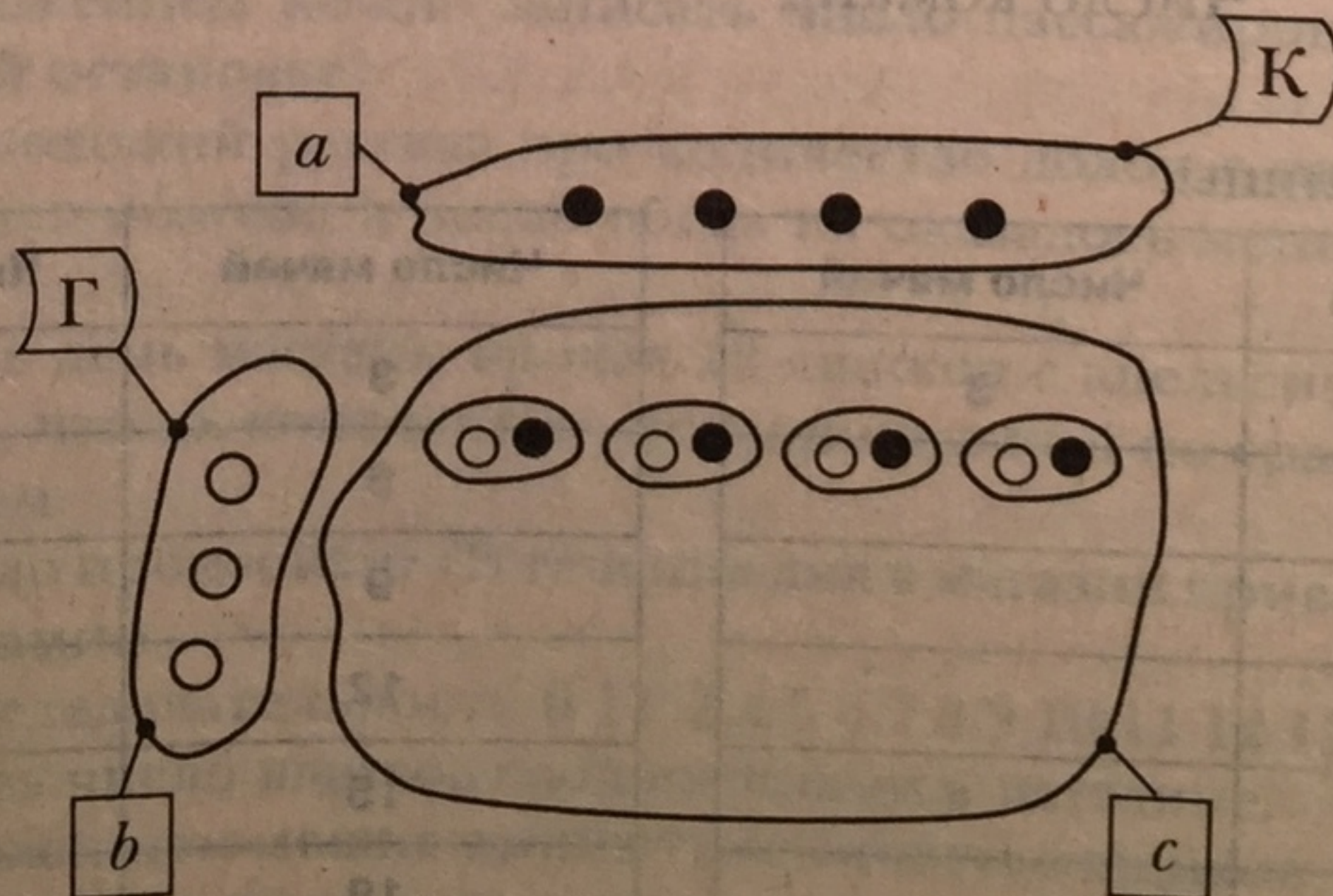


Рис. 152

Запиши выражения для a , b , c .
 Какие числа можно поставить в каждое из этих выражений вместо a , b , c ?
 Продолжи рисунок:

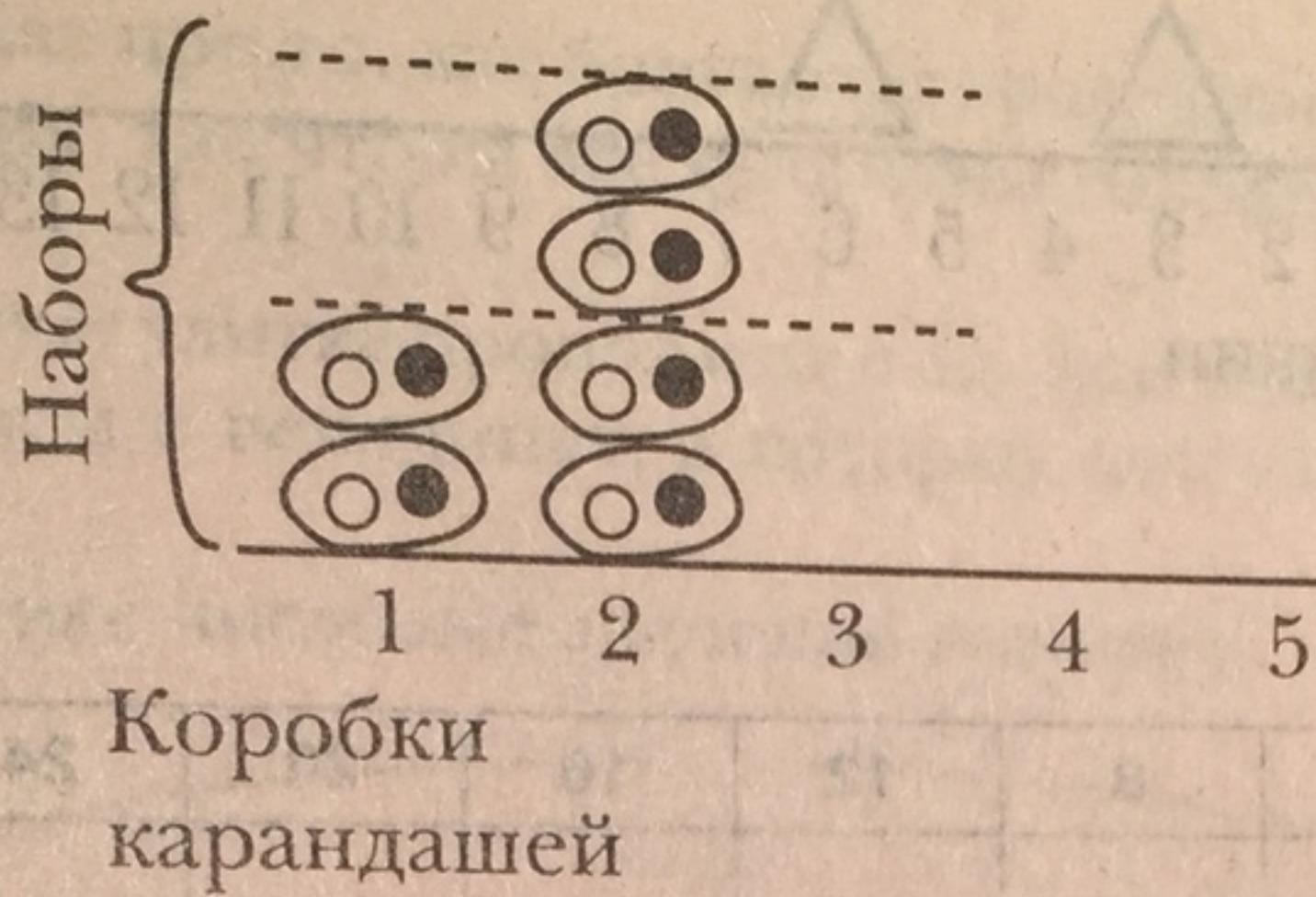


Рис. 153

Какое количество коробок с красками соответствует этому рисунку?
 Заполни таблицу:

		Число коробок с красками					
		1	2	3	4	5	6
Число коробок карандашей	2	2	4				
	3						
	4						
	5						
		Число наборов					

Придумай похожий рассказ про блузки и юбки у Кати.
 2.4. На швейной фабрике из куска ткани длиной a м шьют b платьев.
 На каждое платье расходуется c м ткани.
 О каких величинах здесь говорится? На какие вопросы об этих величинах можешь ответить?
 Отметь на рисунке числовые значения величин:

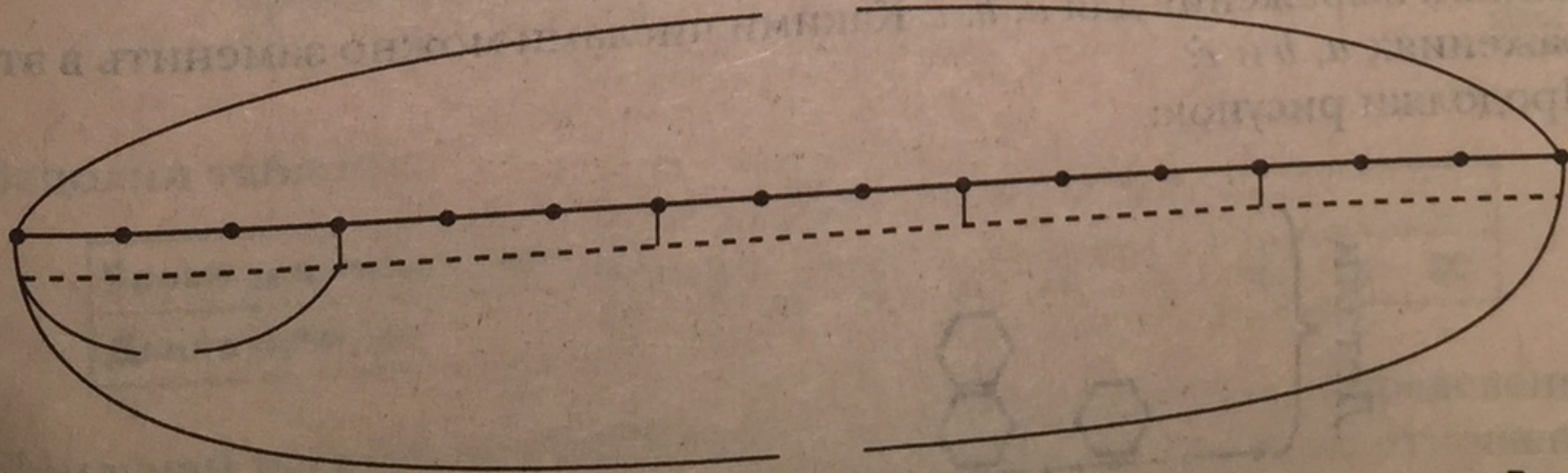


Рис. 154

Запиши выражения для a , b , c .
 Какие числа можно поставить в эти выражения вместо a , b , c ?

Продолжи рисунок:

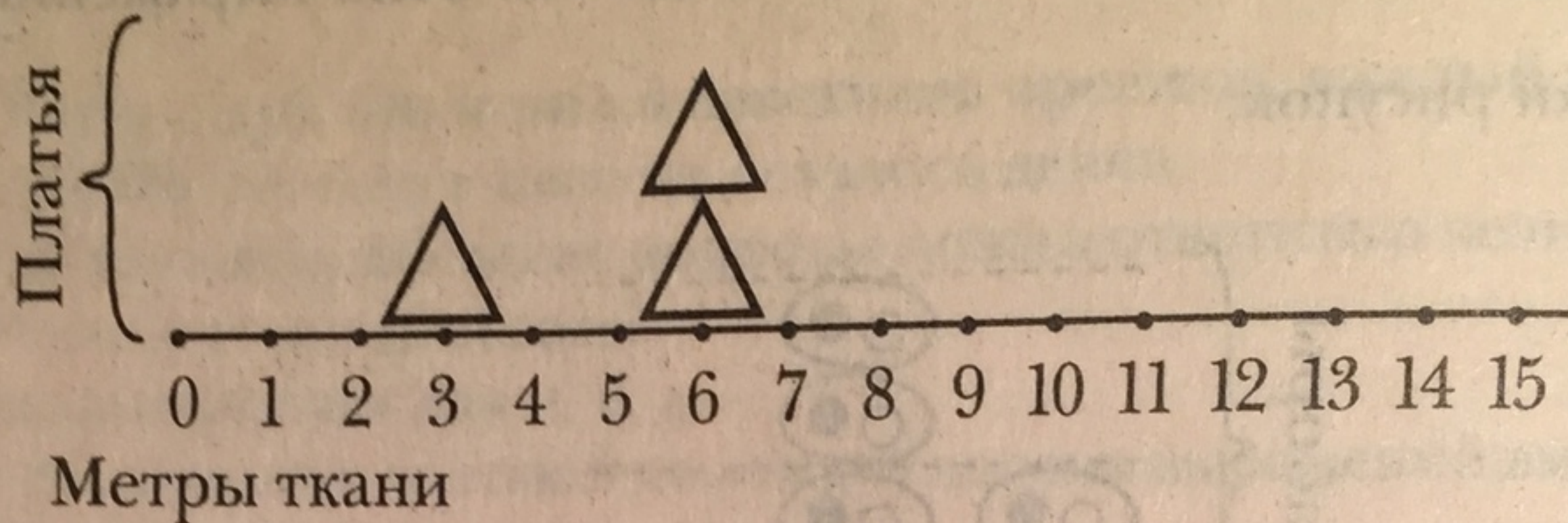


Рис. 155

Заполни таблицу:

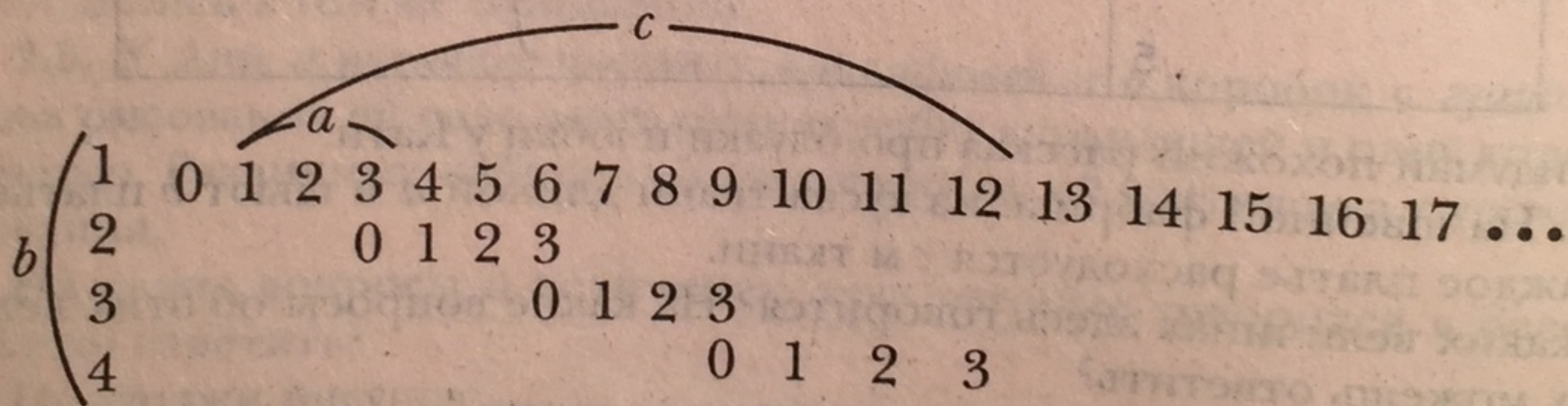
Число метров	4	8	12	16	20	24	28	32
Число платьев	1							

Придумай рассказ про массу печенья в ящиках так, чтобы все величины находились в том же отношении.

2.5. Каждый час токарь изготавливает a деталей. За b часов он изготовил c деталей.

На какие вопросы о величинах, о которых здесь сказано, ты можешь ответить?

Отношения между этими величинами можно изобразить с помощью последовательности:



Запиши выражения для a , b , c . Какими числами можно заменить в этих выражениях a , b и c ?

Продолжи рисунок:

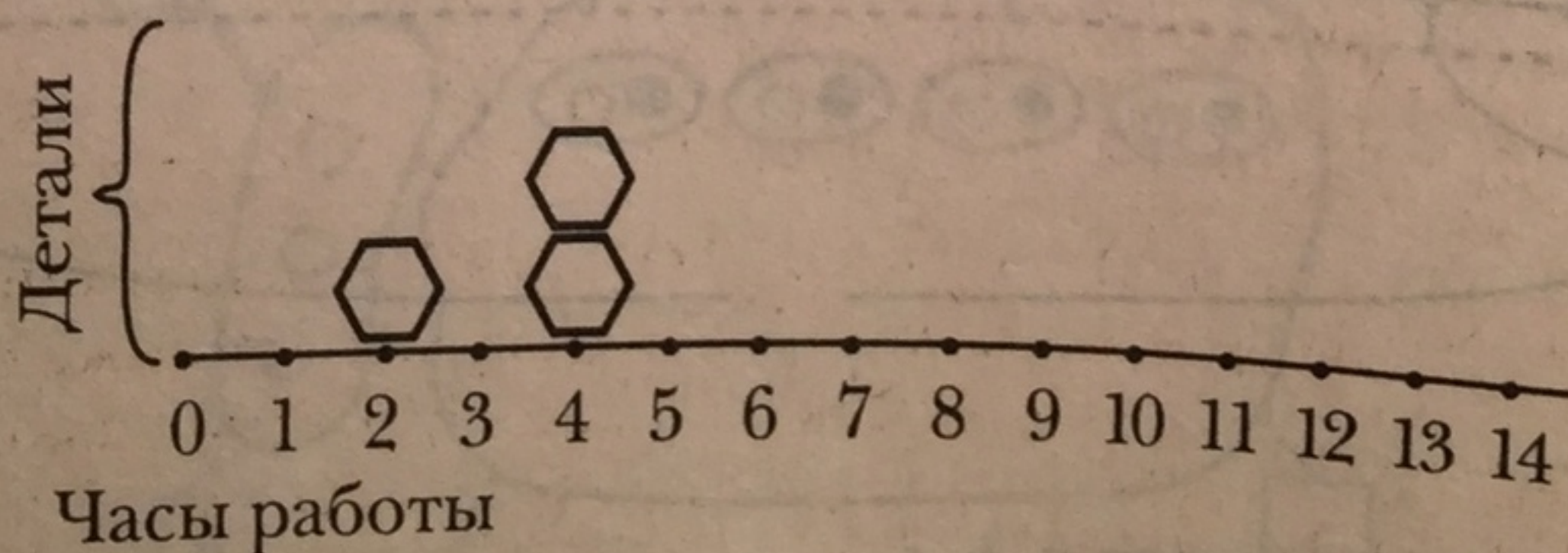


Рис. 156

Заполни таблицу:

Время работы	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
Число деталей	5									

Придумай рассказ про то, как бригада второклассников изготавливает елочные украшения, так чтобы все величины находились в том же отношении.

2.6. За одну минуту улитка проползает a см. b см она проползла за c мин. На какие вопросы о величинах, о которых здесь сказано, ты можешь ответить?

Отметь на рисунке числовые значения величин:

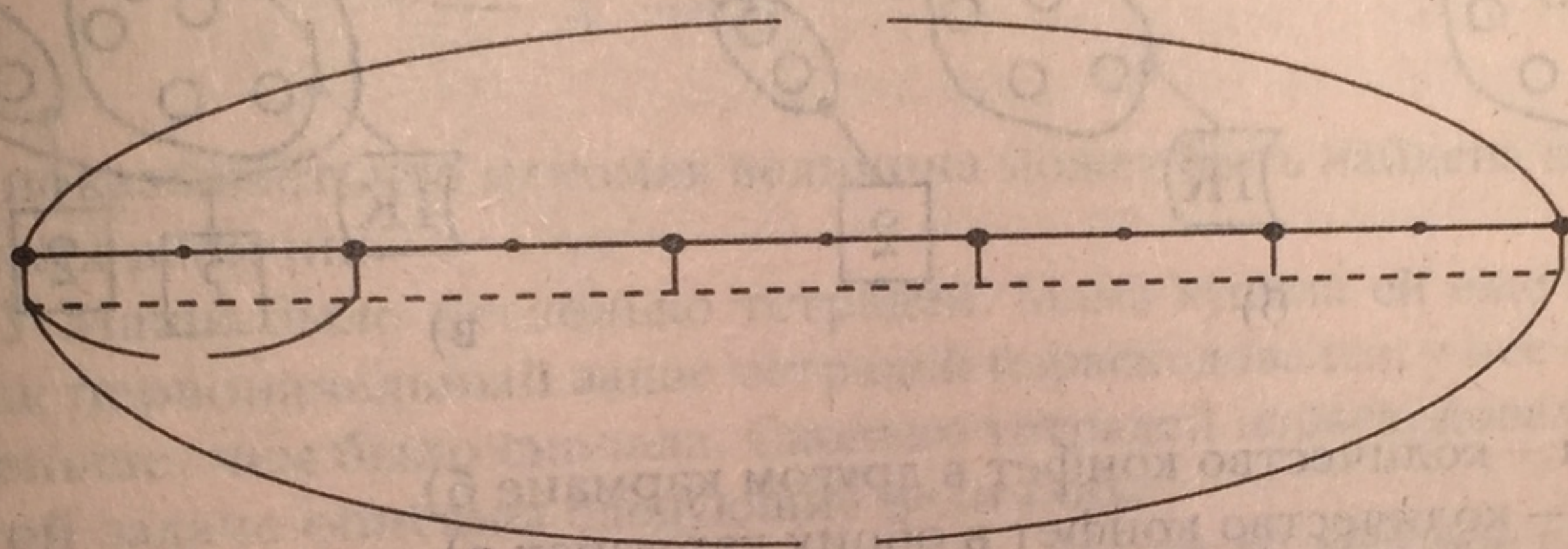


Рис. 157

Запиши выражения для a , b , c . Какие числа можно поставить в эти выражения вместо a , b , c ?

Продолжи рисунок:

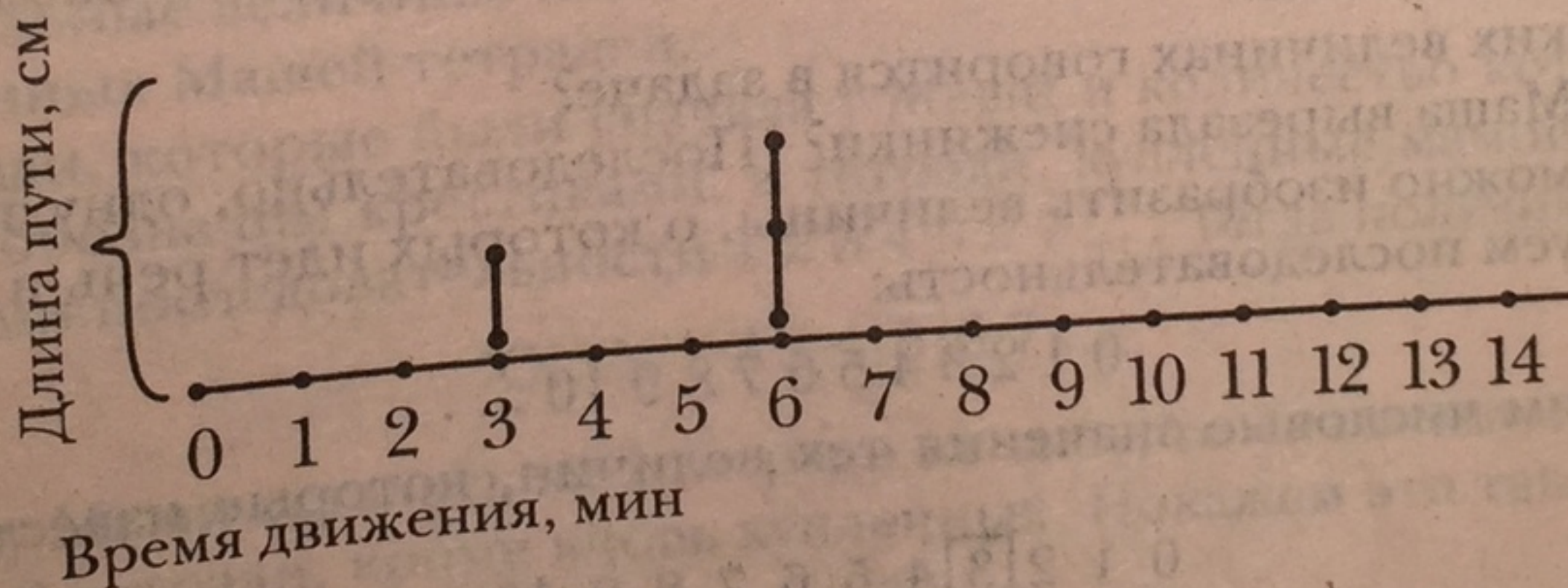


Рис. 158

Заполни таблицу:

Время движения, мин	1																
Длина пути, см	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20							

Придумай рассказ про спортсмена, который пробегает определенную дистанцию, так чтобы все величины находились в таком же отношении. Следующий пример показывает, как можно провести анализ текста задачи.

Пример 3

3.1. В одном кармане у Кати 5 конфет, а в другом — 2. Сколько конфет у Кати в двух карманах?

— О каких величинах говорится в этой задаче? (О количествах конфет в одном кармане; в другом кармане; в двух карманах.)

— Числовые значения каких из этих величин известны, а каких — неизвестны?

— Как можно изобразить эти величины? Нарисуем картинку. Сначала нарисует количество конфет в одном кармане а):

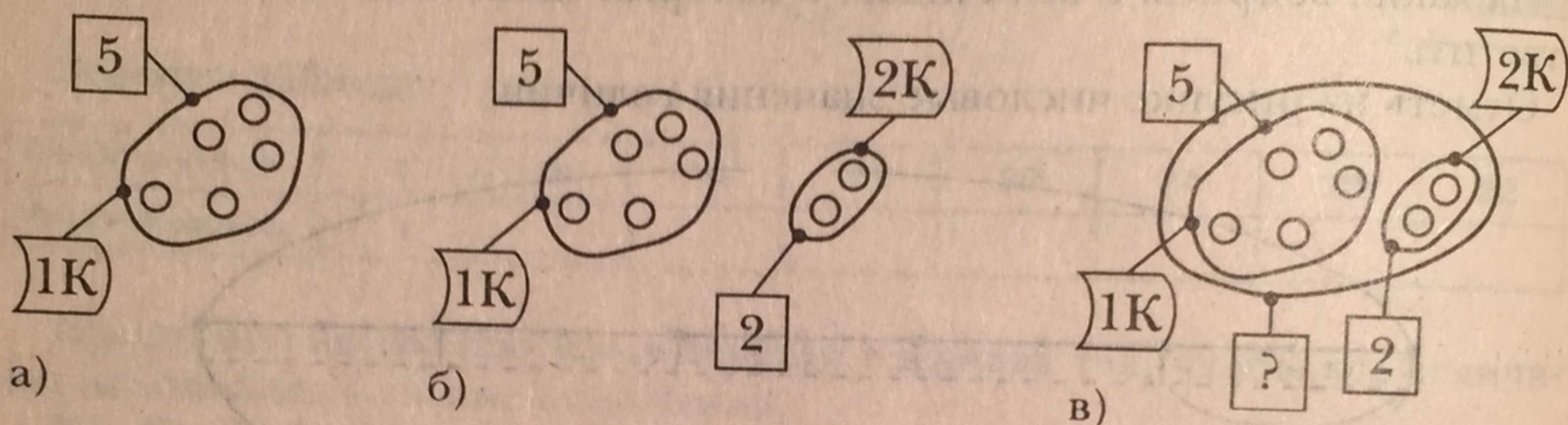


Рис. 159

Потом — количество конфет в другом кармане б).

Затем — количество конфет в обоих карманах в).

Это количество неизвестно, его требуется найти, поэтому поставим знак вопроса.

Что нужно сделать с известными количествами, чтобы найти неизвестное? (Их надо сложить.)

3.2. Маша вырезала сначала 3 снежинки, потом еще 4. Сколько снежинок вырезала Маша?

— О каких величинах говорится в задаче?

— Как Маша вырезала снежинки? (Последовательно, одну за одной.)

— Как можно изобразить величины, о которых идет речь в задаче? Нарисуем последовательность:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ...

Отметим числовые значения тех величин, которые известны. Получим:

0 1 2 **3** 4 5 6 7 8 9 10 ...

0 1 2 3 **4**

Покажем числовое значение величины, которую нужно найти:

0 1 2 **3** 4 5 6 7 8 9 10 11 ...

0 1 2 3 **4**

Какое действие надо произвести с известными величинами, чтобы найти неизвестную?

3.3. Мама израсходовала на кашу 4 кружки молока, а 2 кружки выпили дети. Сколько кружек молока было израсходовано?

Чтобы изобразить величины, рассматриваемые в задаче, а это 3 емкости, причем меры двух из них известны, а третью требуется найти. Возьмем произвольный отрезок в качестве изображения емкости одной кружки, т.е. единицу измерения. Тогда получим картинку:

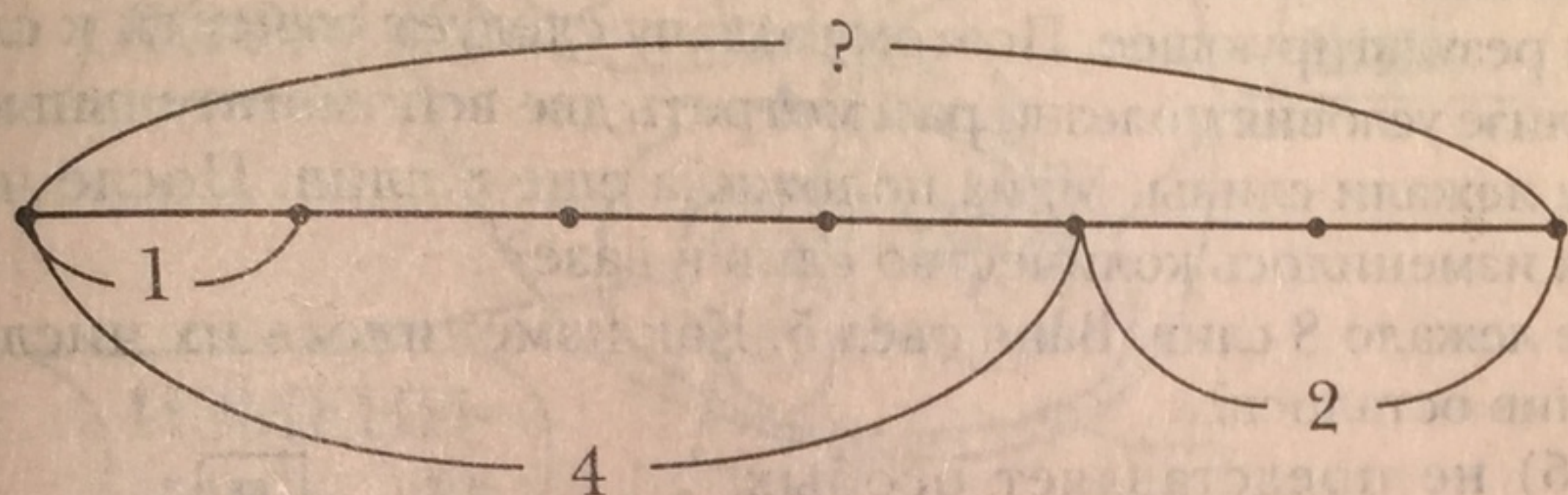


Рис. 160

Она показывает, что искомая величина может быть найдена как сумма известных величин.

3.4. У Маши было несколько тетрадей. Мама купила ей еще 5. После того как первоначальный запас тетрадей израсходовался, у нее осталось на 2 меньше, чем было сначала. Сколько тетрадей израсходовала Маша?

В этой задаче описаны следующие величины:

Количество тетрадей: а) которое было у Маши; б) которое ей купила мама; в) которое она израсходовала; г) которое у нее осталось; д) на которое уменьшилось первоначальное число тетрадей.

Из них известно количество купленных тетрадей и количество, на которое уменьшился первоначальный запас тетрадей.

Все остальные величины неизвестны. Требуется найти количество израсходованных Машей тетрадей.

Те тетради, которые были сначала у Маши и количество которых неизвестно, обозначим крестиками, а тетради, купленные мамой, обозначим знаками последовательности 1 2 3 4 5 6 7 Тогда получим:

XXXX 1 2 3 4 5 6 7 ...

Так как у Маши осталось на 2 тетради меньше, то она взяла из тех, что были еще 2 тетради, кроме вновь купленных. Покажем это так:

XXXX 1 2 3 4 5 6 7 ...

2 1

Тогда все израсходованные тетради можно обозначить с помощью последовательности:

XXXX 1 2 3 4 5 6 7 ...

2 1

1 2 3 4 5 6 7

Эта картинка показывает, что количество израсходованных Машей тетрадей есть сумма количества тетрадей, которое купили, и количест-

ва, на которое уменьшился первоначальный их запас. Можно сказать: «Так как тетрадей осталось меньше, чем было до покупки, то израсходованы все, что купили, и те, что были».

3.5. В вазе лежали сливы. Ваня съел 5. После чего мама положила в вазу еще 8 слив. Как изменилось их количество?

Все четыре количества слив, соответствующие последовательным моментам времени, неизвестны. Известны только два их изменения, а требуется найти результирующее. Поэтому задачу следует отнести к сложным.

При анализе условия полезно рассмотреть две вспомогательные задачи:

а) В вазе лежали сливы. Мама положила еще 8 слив. После чего Ваня съел 5. Как изменилось количество слив в вазе?

б) В вазе лежало 8 слив. Ваня съел 5. Как изменилось их число в вазе? Сколько слив осталось?

Задача б) не представляет особых трудностей. Ее вспомогательная модель может быть такова (рис. 161):

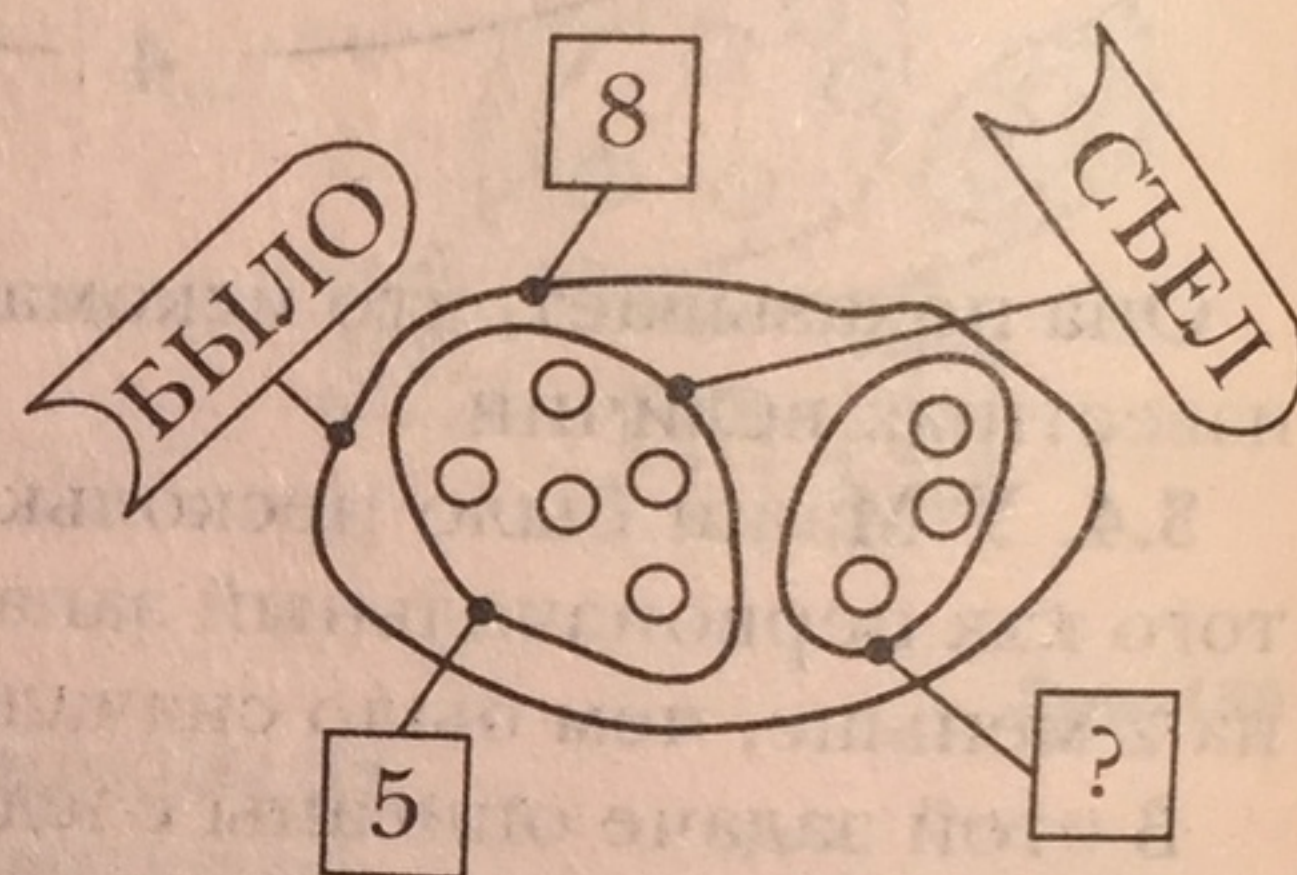


Рис. 161

Ответ очевиден: число слив в вазе уменьшилось на 5, осталось 3 сливы.

Задача 3.5 а) отличается тем, что увеличение и уменьшение исходного количества слив поменялись местами. Что легче воспринимается? Легче представить то, что именно из этих 8 слив и были съедены 5. Графическую модель этой ситуации можно представить так:



Рис. 162

Рисунок 162 показывает, на сколько задача а) сложнее задачи б). При чем можно отметить, что в этой ситуации первоначально в вазе могло и не быть слив. В то время как в исходной ситуации такова, что первоначальное число слив в вазе не могло быть меньше 5. Поэтому графическая модель ситуации должна быть изменена (рис. 163):

звать: «Так
ходованы
ложила в
ным мо-
и, а требу-
ложным.
е задачи:
его Ваня
о в вазе?

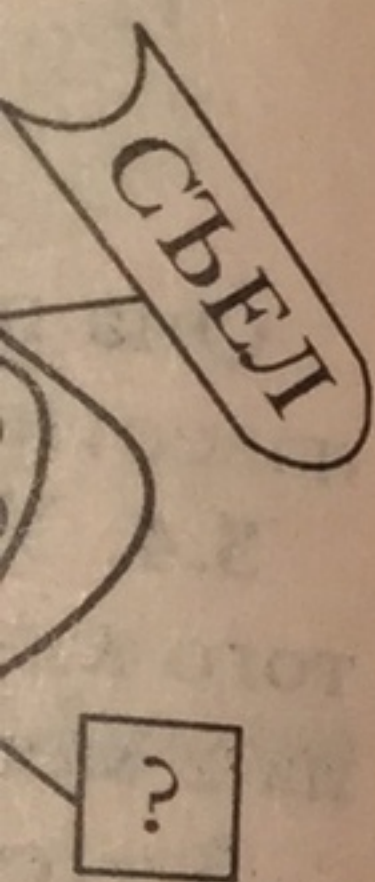


Рис. 161

редста-

Рис. 162

При-
огло и
овона-
иичес-



Рис. 163

Следует отметить, что в результате описанных изменений количество слив может как уменьшиться, так и увеличиться в зависимости от того, как относятся числа съеденных и добавленных слив.

3.6. Рассмотрим 3 задачи:

а) Мастер изготавливает 15 деталей за 3 ч. Сколько деталей изготавливает мастер за 1 ч, если каждый час он изготавливает одно и то же количество деталей?

б) Поезд за 4 ч прошел путь длиной в 160 км. Сколько километров в среднем он проходил за 1 ч? (С какой средней скоростью двигался поезд?)

в) На пошив 12 одинаковых платьев расходуется 36 м ткани. Сколько ткани расходуется на 1 платье?

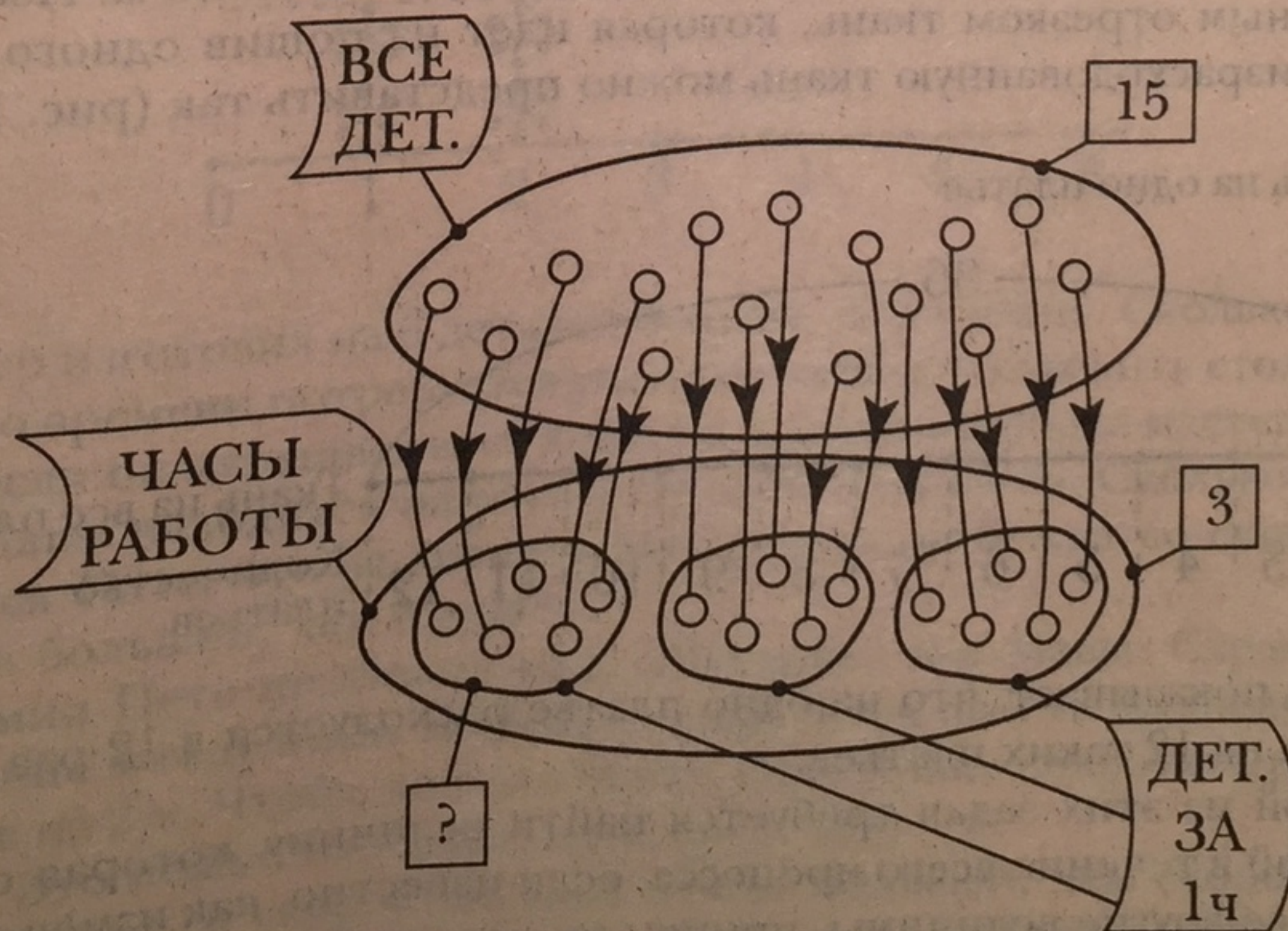


Рис. 164

В каждой из этих задач описывается некоторый процесс, который прямолинейно и равномерно протекает во времени. Причем в последней задаче время присутствует неявно, тем не менее ясно, что пошив не может протекать иначе как процесс во времени.

а) Так как мастер изготавливает одно и то же количество деталей за 1 ч, то количество деталей, изготовленных за 2 ч увеличится в 2 раза, а за 3 ч — в 3 раза. Значит, 15 деталей больше, чем количество деталей, изготовленных за 1 ч, в 3 раза, а количество деталей, изготовленных за 1 ч в 3 раза меньше, чем 15. Если возьмем все изготовленные мастером детали, то их нужно распределить по 3 ч поровну. Это можно изобразить так (рис. 164).

Чтобы поровну в каждый час распределить 15 деталей, поступаем так: «берем» одну деталь и относим ее в первый час, потом «берем» другую и относим ее во второй час, затем «берем» третью и относим ее в третий час. Так поступаем до тех пор, пока не распределим все детали.

б) Длину пути, который проходит поезд за 4 ч, также надо распределить на 4 равные части. Чтобы изобразить процесс движения поезда, возьмем произвольный отрезок, длину которого будем считать равной 20 км. Тогда пройденный путь изобразится отрезком так (рис. 165):

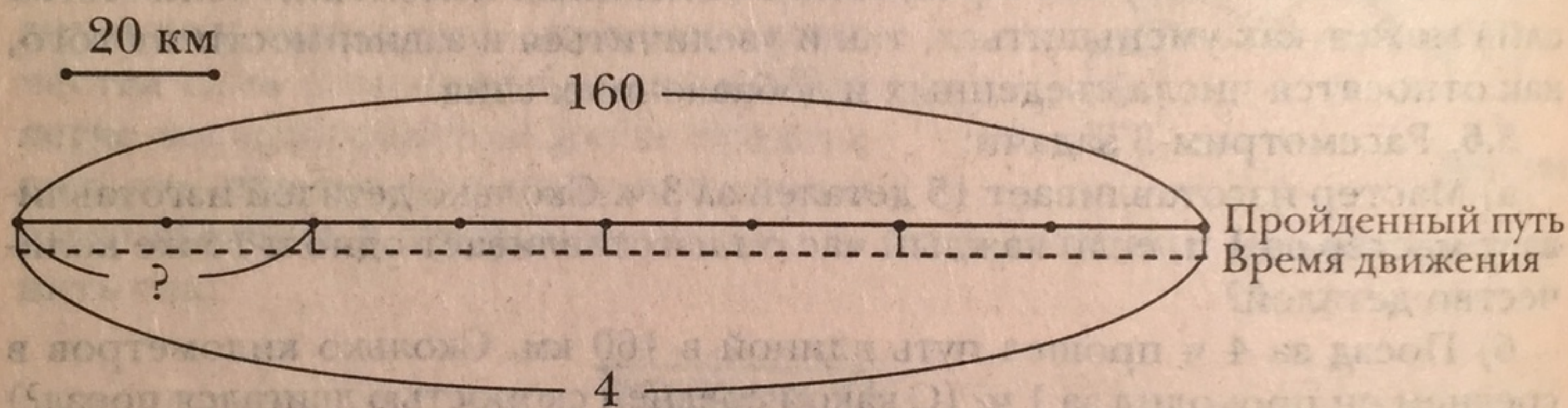


Рис. 165

В задаче 3.6 в) необходимо разбить на равные части 36 м. Изобразим произвольным отрезком ткань, которая идет на пошив одного платья. Тогда всю израсходованную ткань можно представить так (рис. 166):

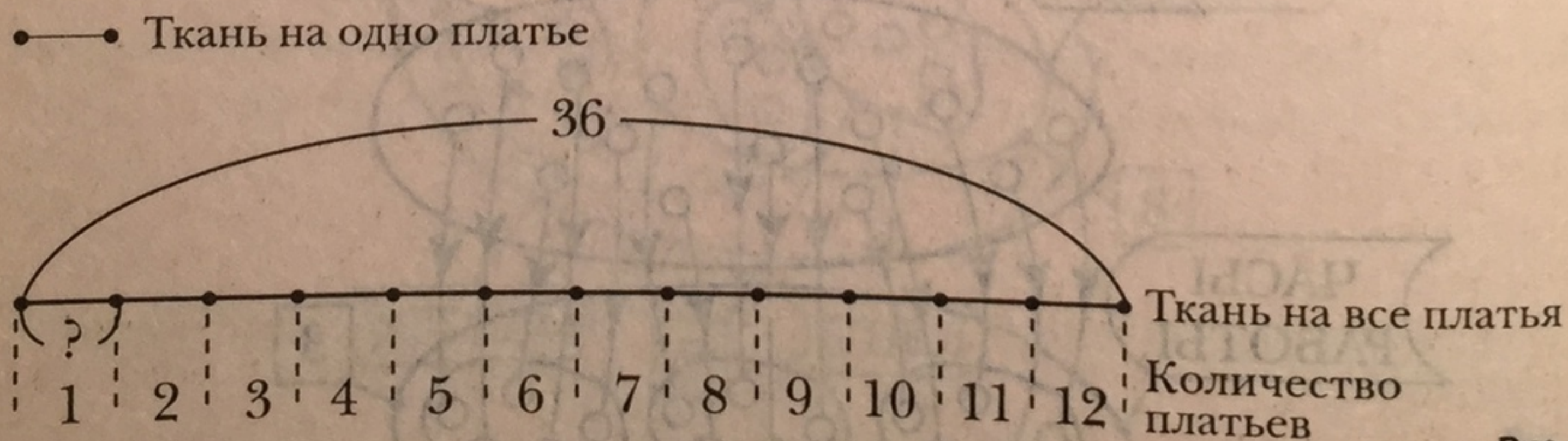
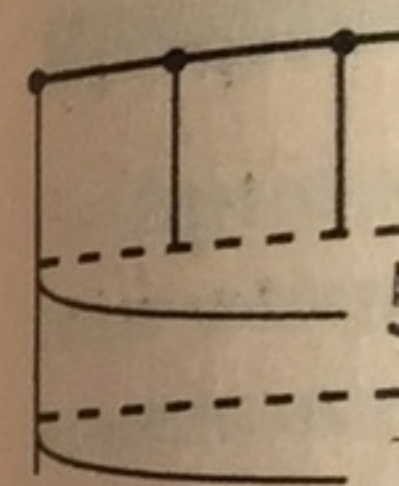


Рис. 166

Рисунок показывает, что на одно платье расходуется в 12 раз меньше ткани, чем на 12 таких платьев.

В каждой из этих задач требуется найти величину, которая остается неизменной в течение всего процесса, если известно, как изменяются во времени две другие величины, причем их изменение таково, что с изме-

нением о
другая ве
требовал
ся не 4 ч
км. Если
в 3 раза
3.7. Ск
раз мень
ти одно
За каж
большее,
времени



3.8. Уч
час работ
6 ч работ
Мастер
ко и учен

Мастер
тельного
талей, ес
3.9. Ма
требуется
2 м/мин
За 1 м
расстоян
нуту еще
на 10 м. З
Петя б
На сколь

Мастер
тельного
талей, ес
3.9. Ма
требуется
2 м/мин
За 1 м
расстоян
нуту еще
на 10 м. З
Петя б
На сколь

нением одной из них в несколько раз, во столько же раз изменяется и другая величина. Так, если бы мастер изготовил 45 деталей, то ему потребовалось бы работать в 3 раза дольше, т.е. 9 ч. Если бы поезд двигался не 4 ч, а 2 ч, то пройденный им путь был бы в 2 раза меньше, т.е. 80 км. Если бы взяли ткани в 3 раза меньше, т.е. 12 м, то и платьев сшили бы в 3 раза меньше, а именно 4.

3.7. Скорость автомобиля в 5 раз больше скорости лошади. Во сколько раз меньше времени понадобится автомобилю, чем лошади, чтобы пройти одно и то же расстояние?

За каждую единицу времени автомобиль проходит расстояние в 5 раз большее, чем лошадь. Поэтому то расстояние, которое проходит за 5 ед. времени лошадь, автомобиль проезжает за 1 ед. (рис. 167).

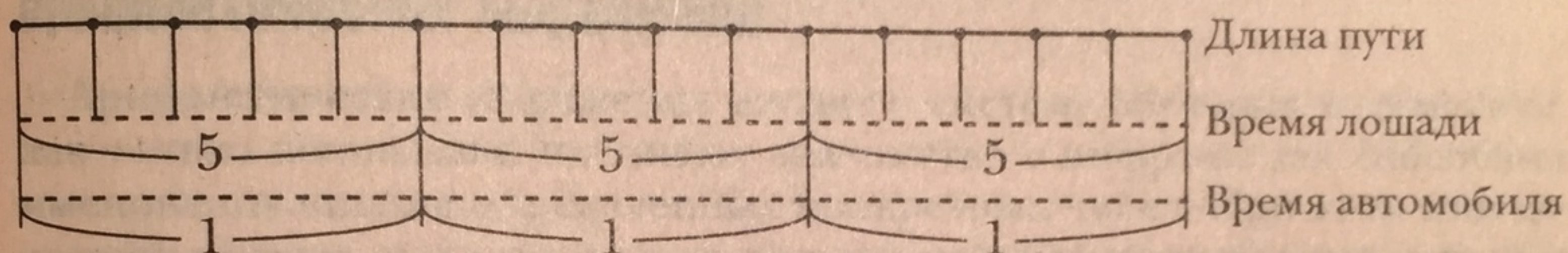


Рис. 167

3.8. Ученик изготавливает на 2 детали меньше, чем мастер за каждый час работы. На сколько больше деталей изготовит мастер, чем ученик за 6 ч работы?

Мастер за каждый час работы изготавливает столько же деталей, сколько и ученик и, кроме того, еще 2. Это можно представить так (рис. 168):

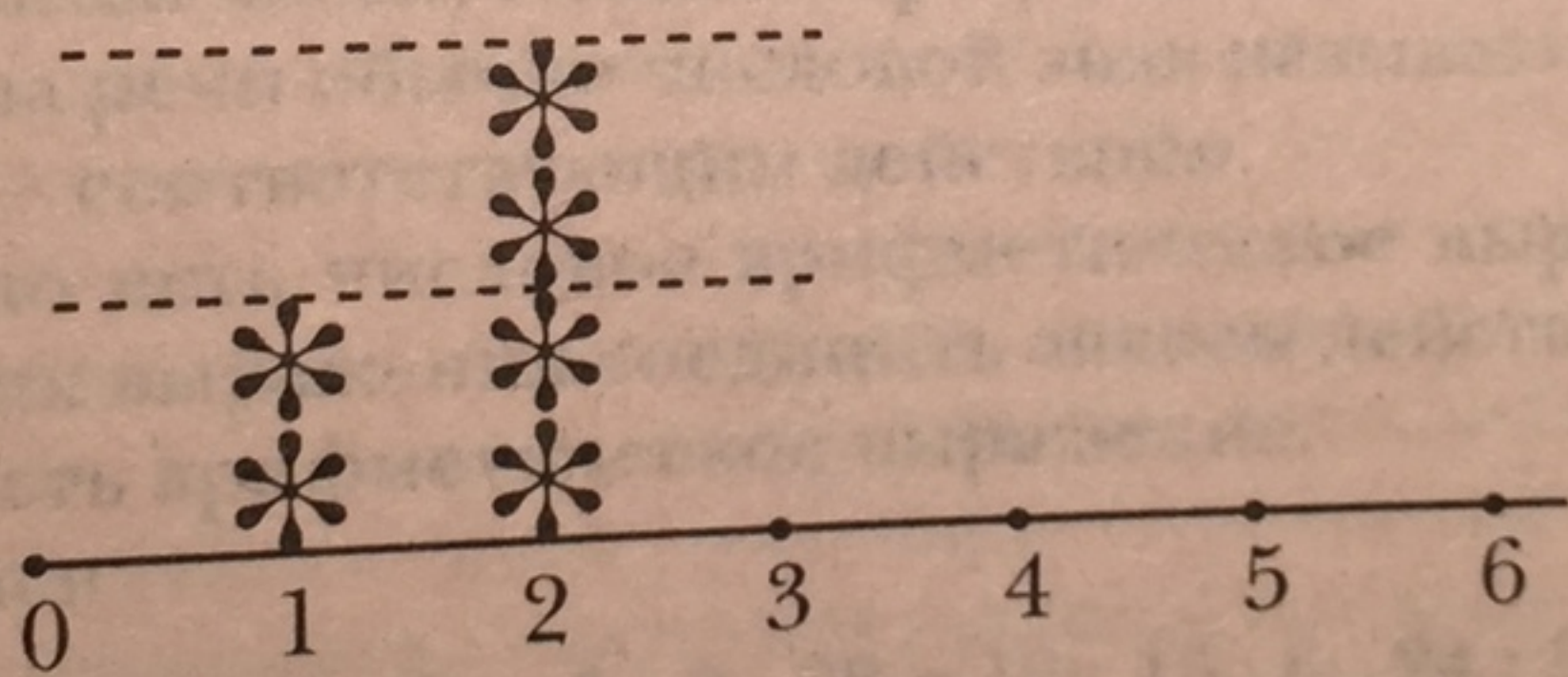


Рис. 168

Мастер изготовил на 6 деталей больше, чем ученик. Сколько дополнительного времени потребуется ученику, чтобы изготовить столько же деталей, если он изготавливает в час на 2 детали меньше мастера?

3.9. Маша находится на расстоянии 10 м от Пети. Сколько минут потребуется Пете, чтобы догнать Машу, если он бежит со скоростью на 2 м/мин большей, чем Маша?

За 1 мин Петя пробежит на 2 м больше, чем Маша. Следовательно, расстояние между ними за минуту сократится на 2 м. За следующую минуту еще на 2 м. Чтобы догнать Машу, Пете нужно сократить расстояние на 10 м. Это можно изобразить так (рис. 169).

Петя бежит со скоростью на 2 м/мин большей, чем скорость Маши. На сколько больше метров пробежит Петя, чем Маша за 12 мин?

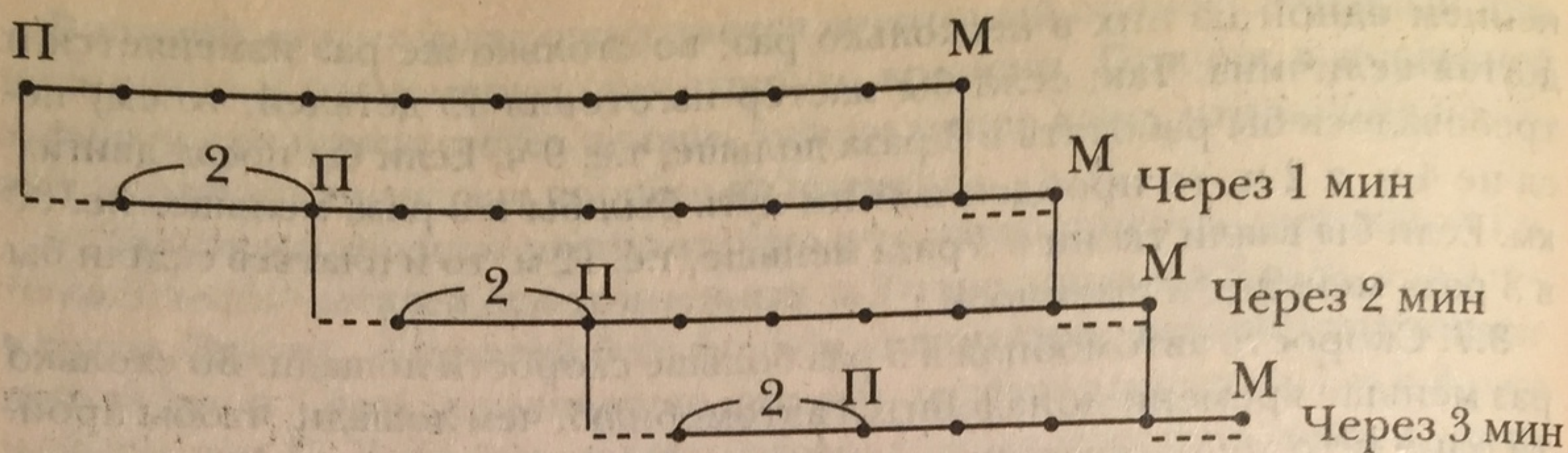


Рис. 169

Так же, как и в предыдущем примере, эта задача позволяет углубить понимание описанного в исходной задаче процесса.

§ 1. Тождество арифметики

Арифметика как толкование именования действий математическими последовательностями. Число. Метическая ла как сгруппированная тема и словесных значений. Кости и знаки действий. Каждое арифметическое действие записывается. Значение

являются. Мы видим скобки. Смысл арифметических действий, если два выражения записаны при помощи вычислительных знаков, совпадают. Для не Наприме

Глава II.

Элементы алгебры и геометрии в курсе математики начальных классов

§ 1. Тождественные преобразования арифметических выражений

Арифметические выражения входят в систему обучения математике, как только школьники начинают знакомство с цифрами как способами именования вполне определенных конкретных чисел. При этом ими делаются первые шаги по пути овладения математической символикой и математическим языком. В то же время, записывая число определенной последовательностью цифр, ребенок начинает знакомство с отвлеченным числом. Над такими отвлеченными числами можно производить арифметические действия, независимо от природы числа. Рассматривая числа как систему знаков, операции над ними подчиняются точно сформулированным правилам, пренебречь которыми невозможно. В этой системе и строятся арифметические выражения, они состоят из числовых знаков (имен чисел) и знаков арифметических действий. Для краткости и удобства речи обычно числовой знак называют просто числом, а знак действия — соответствующим действием.

Каждое число есть числовое арифметическое выражение. Если два арифметических выражения соединить знаком действия, то полученная запись также есть арифметическое выражение.

Значит, записи

$$56; 2 - 34; 3 : 0; 28 + 12; 15 \cdot 6; 24 : 5; \\ 56 + (2 - 24); (28 + 12) - 56; (56 + (15 \cdot 6)) - ((28 + 12) - 2)$$

являются примерами арифметических выражений.

Мы видим, что в этих записях используются дополнительные символы — скобки. Скобки показывают, какие именно выражения соединяются знаками арифметических действий или то, что принято называть порядком действий, если ставится задача найти числовое значение данного выражения.

Два выражения можно соединить знаком равенства. Полученную запись принято называть *равенством*. Такое равенство верно, если числовые значения выражений, стоящих справа и слева от знака равенства, совпадают. В противном случае равенство неверно.

Для некоторых выражений невозможно найти их числовые значения. Например, выражения $2 - 34$, $24 : 5$ таковы, что не существует натураль-

ного числа, являющегося значением каждого из них. На множестве натуральных чисел они не имеют смысла. Выражение $3 : 0$ также не имеет смысла, но в отличие от предыдущих примеров, такое выражение не имеет смысла на любом числовом множестве.

Таким образом, между двумя арифметическими выражениями, имеющими смысл, устанавливается отношение равенства: два выражения равны тогда и только тогда, когда их числовые значения совпадают.

Отношение равенства между выражениями имеет двойкий смысл. Каждое из равных выражений можно рассматривать как тождество, означающее, что слева и справа от знака равенства записано одно и то же число. Например, число 5 можно записать как $2 + 3$, $15 - 10$, $25 : 5$, $(120 : 4) - 25$ и др. С другой стороны, это отношение можно рассматривать как отношение эквивалентности на множестве арифметических выражений. С этой точки зрения все записанные выражения, обозначающие число 5, входят в один и тот же класс эквивалентности.

Запись выражения, имеющего смысл, другим выражением из того же класса эквивалентности, при которой оба выражения соединяются знаком равенства, называется тождественным преобразованием. Выражения, получающиеся тождественным преобразованием из некоторого данного выражения, имеют существенно различный математический смысл. С лингвистической точки зрения тождественно равные выражения являются омонимами, но омонимия математического языка значительно более содержательна, чем соответствующее явление в естественном языке. Действительно, тождественные преобразования дают возможность получить новое нетривиальное знание. Это можно увидеть из простейшего примера. По традиционной программе (учебник *М.И.Моро* и др.) сумма $6 + 3$ находится так называемым приемом по частям: сначала 3 заменяется суммой $2 + 1$, затем к 6 прибавляется 2 и к полученному результату прибавляется 1. Что можно записать в виде цепочки тождественных преобразований так: $6 + 3 = 6 + (2 + 1) = (6 + 2) + 1 = 8 + 1 = 9$. Это значит, что тождественные преобразования позволили найти неочевидный (в рамках данной системы обучения) ответ.

Какие же правила позволяют преобразовывать арифметические выражения так, чтобы каждое следующее было тождественно равно каждому из предшествующих? Таких правил два:

1) каждое выражение можно заменить любым другим, тождественно ему равным;

2) выражение, получающееся из данного применением к нему свойств арифметических действий, является тождественно равным данному.

В приведенном выше примере использованы оба правила. Действительно, сначала мы заменили 3 равным ему выражением $2 + 1$, затем применили свойство ассоциативности сложения, после чего заменили $6 + 2$ равным ему выражением и $8 + 1$ также заменили на равное.

Ранее была отмечена необходимость использования скобок для записи арифметических выражений. Но легко видеть, что количество скобок в выражениях, содержащих более трех действий, быстро возрастает. Например, выражение $((((1 + 2) + 3) + 4) + 5) + 6$ содержит 8 скобок —

4 левых и 4 правых. Это создает существенные неудобства как для чтения, так и для записи. Поэтому возникает потребность в упрощении записи арифметического выражения так, чтобы сохранился его первоначальный смысл. Если проанализировать приведенный пример, то можно увидеть, что скобки в нем задают такой порядок действий, который совпадает с порядком их записи. Поэтому естественно записать его без скобок, считая эту запись сокращением исходной. В то же время, так как сложение ассоциативно и коммутативно, это выражение можно записать и многими другими способами, произвольно меняя как порядок действий, так и порядок слагаемых.

Сравним тождественные преобразования двух таких выражений:

$$\begin{aligned} (((1 + 2) + 3) + 4) + 5 + 6 &= (((3 + 3) + 4) + 5) + 6 = ((6 + 4) + 5) + 6 = \\ &= (10 + 5) + 6 = 15 + 6 = 21; \\ (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) &= 7 + 7 + 7 = 21. \end{aligned}$$

Эти примеры показывают, что с помощью тождественных преобразований можно упрощать вычисления. В частности, задача вычисления значения выражения $(137 \cdot 3) + (137 \cdot 7)$ с помощью тождественных преобразований, в основе которых лежит дистрибутивность умножения, значительно облегчается, как только мы замечаем, что оно равно $137 \cdot (3 + 7) = 137 \cdot 10$.

Правило опускания части скобок в арифметическом выражении регламентируется следующим соглашением:

если в выражении имеются скобки, то действия в скобках выполняются первыми, затем выполняются действия умножения и деления в том порядке, в каком они встречаются в записи, и только потом — действия сложения и вычитания, также в порядке их записи.

Это значит, что запись $137 \cdot 3 + 137 \cdot 7$ есть сокращение для $(137 \cdot 3) + (137 \cdot 7)$. Но мы видели, что выполнять действия в соответствии с этим соглашением в данном выражении нежелательно.

В соответствии с принятым соглашением выражение $7 - 4 - 2$ есть сокращение для $(7 - 4) - 2$, но не для $7 - (4 - 2)$. Легко видеть, что значения этих выражений различны. Этот пример показывает, что вычитание не ассоциативно и поэтому в последнем выражении скобки нельзя опустить, так же как нельзя переставлять порядок компонентов вычитания, в силу его некоммутативности. Аналогично запись $12 + 5 - 3 - 1$ есть сокращение для $((12 + 5) - 3) - 1$, но не для $(12 + (5 - 3)) - 1$.

Равенства $2 \cdot 27 : 9 = (2 \cdot 27) : 9 = 2 \cdot (27 : 9)$ справедливы в силу свойства деления (см. свойство 2.11), поэтому значение выражения $(126 \cdot 27 - 54 \cdot 12) : 9$ целесообразно находить так:

$$\begin{aligned} (126 \cdot 27 - 54 \cdot 12) : 9 &= (126 \cdot 27) : 9 - (54 \cdot 12) : 9 = \\ &= 126 \cdot (27 : 9) - (12 \cdot 54) : 9 = 126 \cdot 3 - 12 \cdot 6, \end{aligned}$$

воспользовавшись распределительным свойством деления относительно вычитания справа (см. свойство 2.17).

Этот пример показывает, что тождественные преобразования арифметических выражений требуют определенной изобретательности,

основанной на анализе данного выражения, предшествующем самим преобразованиям, а также на знании свойств арифметических действий. Кроме того, тождественные преобразования совершенно точно аргументированы и являются примерами правильных дедуктивных рассуждений, причем требуемые умозаключения производятся над явно заданными объектами — записями на математическом языке, — что, безусловно, легче, чем умозаключения над утверждениями, смысл которых не поддается «материализации».

Овладение умением производить тождественные преобразования позволяет школьникам применять на деле свойства арифметических действий, а следовательно, способствует их пониманию и запоминанию. Но, что еще более важно, развивает умения обосновывать свои действия, приучает ум к дедукции. В то же время овладение таким умением является чрезвычайно существенным с точки зрения подготовки ребенка к дальнейшему изучению математики в основной школе.

Как может быть организована познавательная деятельность школьников, направленная на овладение тождественными преобразованиями арифметических выражений, показывают следующие примеры.

Пример 1

1.1. Из данных записей выбери те, которые являются арифметическими выражениями:

$$2 + ; 2 - 0; - 5; 28 : 4; (15 \cdot 3) - 15; (+ 24) - 7; \\ (18 + 15) - (32 \cdot 4); 24 - 3 \cdot 5; 12 - 2 - 8; + - 18 \cdot 32; 2 + 3 + 5; \\ (29 - 32) : 5; (8 - (4 + 5)) \cdot 2; ((17 + 3) : 5) \cdot 4.$$

1.2. Найди значения тех выражений, которые сможешь вычислить:

$$2 + (5 - 4); (3 - 6) + 2; (8 + 12) - (5 - 5); (28 : 1) - (28 \cdot 1); \\ (104 - 104) : 3; ((1 + 5) \cdot 3) - 9; ((25 \cdot 7) + (106 \cdot 4)) \cdot 0; \\ (135 \cdot 29) : (234 - 234); (((8 - 6) \cdot 4) + 32) : 5.$$

1.3. Сравни выражения и найди их значения:

$$\text{а) } ((8 + 6) : 2) + (22 : 11) \text{ и } (8 + (6 : 2) + 22) : 11; \\ \text{б) } (((42 - 2) - 4) : 9) - 3 \text{ и } ((42 - 2) - 4) : (9 - 3).$$

1.4. В данных выражениях часть скобок опущена в соответствии с правилом — соглашением. Вспомни правило и запиши эти выражения без сокращений:

$$2 + 8 - 7; 32 - 15 : 5; 5 \cdot 6 - 18 : 3 - 24; 25 - (36 : 9 + 5); \\ (37 - 2) : 5 \cdot 4; 28 : 7 + 6 : 3 - 4; 34 : 17 \cdot (24 - 3 \cdot 2).$$

1.5. С помощью тождественных преобразований найди значения выражений:

$$168 : 7 + 4 \cdot 25 - 24; 28\,000 + 12\,000 : 6 \cdot 7 - 24 : 8; \\ 60 \cdot 3 : 2 \cdot 6 - 81 : 9; 48 : 8 - (124 - 122); \\ 630 : 70 + (20 - 5) - (13 + 2).$$

Пример 2

2.1. Поставь скобки в данном выражении так, чтобы его значение было равно: 0, 40, 100

$$18 + 21 : 3 - 5 \cdot 5.$$

2.2. Составь выражения, равные данному так, чтобы количество действий увеличилось на одно, на два, на три:

$$63 : 7; 21 \cdot 2; 24 - 4.$$

2.3. В данное выражение вместо a и b поставь такие числа, чтобы оно равнялось 42, 23:

$$a \cdot 3 - 21 : b.$$

2.4. Докажи, что значения данных выражений равны при любых значениях a и b :

$$a \cdot (b + 5) + 4; a \cdot b + a \cdot 5 + 4;$$
$$a \cdot 5 + b \cdot a + 4.$$

§ 2. Способы решения уравнений

Изучение простейших уравнений и способов их решений прочно вошло в систему начальной математической подготовки. Уравнения являются одним из средств моделирования изучаемых фрагментов реальности, и знакомство с ними является существенной частью математического образования. В то же время, знакомство младших школьников с уравнениями подготавливает их к изучению математики в основной школе.

В математике под уравнением принято понимать «аналитическую запись задачи о разыскании значений аргументов, при которых значения данных двух функций равны. Аргументы, от которых эти функции зависят, называются *неизвестными*, а значения неизвестных, при которых значения функций равны, — *решениями* — *корнями уравнения*»¹. Это значит, что понятие уравнения, во-первых, связано с аналитическим выражением (в нашем случае с арифметическим), а во-вторых, — с понятием переменной, принимающей значения из определенного множества.

Если в арифметическом выражении некоторые из чисел заменены буквами, каждая из которых может принимать числовые значения (в пределах начального обучения — это натуральные числа), то такое выражение можно рассматривать как функцию, потому что разным значениям входящих в данное выражение букв соответствуют различные значения самого выражения. Такие буквы называют *переменными*. Например, в выражении $7 - a$ переменная a может принимать значения 0, 1, 2, ..., 7. Соответствующими значениями выражения будут 7, 6, ..., 0. Причем на мно-

¹ Математический энциклопедический словарь. — М., 1988. — С. 603.

жестве натуральных чисел других значений переменных для данного выражения, таких, чтобы оно имело смысл, не существует.

Два выражения можно соединить знаком равенства. Например, $a - 7 = 7 - a$. Если поставлена задача определить, при каких значениях данное равенство справедливо, т.е. найти те значения a , при которых это равенство справедливо, то такое равенство называют *уравнением*. Соответствующие значения для переменной a называют *корнями уравнения*. Например, рассматривая равенство $a - 7 = 7 - a$ как уравнение, находим, что оно справедливо только при $a = 7$, так как $7 - 7 = 7 - 7$. Следовательно, корнем этого уравнения (или его решением) является число 7, других решений данное уравнение не имеет, в чем легко убедиться, перебрав все возможные для $7 - a$ значения из множества натуральных чисел.

В математике принято неизвестные, входящие в уравнения, обозначать строчными буквами латинского алфавита: x , y , z или теми же буквами с индексами, когда неизвестных много.

Пусть требуется найти решение уравнения $x + 12\,507 = 206\,734$. Решить это уравнение — значит найти такое число, прибавляя к которому 12 507 получим 206 734. Можно заметить, что искомое число приблизительно 200 000. Но $200\,000 + 12\,507 = 212\,507$, что больше, чем 206 734 примерно на 6 000. Поэтому проверим число 194 000, получим $194\,000 + 12\,507 = 206\,507$, что меньше, чем 206 734. Увеличим 194 000 на 200, получим $194\,200 + 12\,507 = 206\,707$. Но число 206 707 меньше 206 734 на 27, поэтому в качестве решения уравнения можно взять 194 227. Проверим: $194\,227 + 12\,507 = 206\,734$.

Таким образом, корнем уравнения $x + 12\,507 = 206\,734$ является число 194 227, что записывается так: $x = 194\,227$.

Метод, с помощью которого найдено решение этого уравнения, принято называть *методом подбора*. Подчеркнем, что именно такой метод ясно показывает смысл понятий «уравнение», «корень уравнения».

Ранее было отмечено, что уравнения являются средством моделирования действительности с целью познания таких ее аспектов, которые не могут быть выявлены ни непосредственным наблюдением, ни умозрительными построениями. Это значит, что уравнения являются средством решения задач практического содержания. Приведем простейший пример. «У Пети было 5 марок, ему подарили еще несколько марок, после чего у него стало 12 марок. Требуется найти, сколько марок подарили Пете».

В задаче описаны три количества марок: количество марок, которое у Пети было (оно известно); количество марок, которое ему подарили (оно неизвестно); количество марок, которое у Пети стало (оно также известно).

Если неизвестное количество обозначим буквой x , то количество марок, которое стало у Пети, можно записать выражением $5 + x$. Известно, что это количество равно 12. Следовательно, можно записать равенство $5 + x = 12$.

Так как в задаче требуется найти то значение x , при котором это равенство справедливо, то получили математическую модель описанного в условии явления. Решение уравнения $5 + x = 12$ дает ответ на вопрос, поставленный в задаче.

Для решения уравнения рассмотрим значения выражения $5 + x$ при разных значениях переменной x . При $x = 0$ $5 + 0 = 5 \neq 12$; при $x = 1$ $5 + 1 = 6 \neq 12$; при $x = 2$ $5 + 2 = 7 \neq 12$ и т.д. Наконец, при $x = 7$ $5 + 7 = 12$. Если x положить равным, например, 8, 9, ..., то легко видеть, что, в силу монотонности сложения, выражение $5 + x$ будет всегда отлично от 12. Значит, $x = 7$ — корень уравнения $5 + x = 12$, а ответом является утверждение: Пете подарили 7 марок.

В начальной школе рассматриваются шесть видов простейших уравнений

$$\begin{aligned} a + x &= b; & a - x &= b; & x - a &= b; \\ a \cdot x &= b; & a : x &= b; & x : a &= b, \end{aligned}$$

где строчные буквы начала латинского алфавита обозначают параметры, т.е. такие величины, которые определяются конкретными условиями задачи, а буквой x — переменная, о разыскании которой и идет речь.

Даже в этих простейших случаях не любое уравнение имеет решение на множестве натуральных чисел. Например, $3 - x = 6$, в чем легко убедиться способом подбора. Способ перебора различных значений переменной служит доказательством того, что данное уравнение не имеет решений. Доказательство того, что уравнение не имеет решений, также является решением. Не имеют решения и уравнения $25 : x = 6$, $x \cdot 7 = 11$ и т.п. А уравнение $0 \cdot x = 0$ таково, что любое натуральное число (и не только натуральное) является его решением. Такие уравнения принято называть *тождествами*.

Можно заметить, что решение уравнений методом подбора достаточно громоздко и требует некоторой изобретательности. В математике разработаны более рациональные способы решения. В основе этих способов лежит понятие равносильности уравнений. Два уравнения называются *равносильными*, если их решения совпадают. Значит, процесс разыскания решений уравнения можно свести к замене данного уравнения последовательностью равносильных ему так, чтобы прийти к уравнению, решение которого очевидно.

В силу существования и единственности сложения и умножения имеют место следующие утверждения:

- если к обеим частям равенства прибавить одно и то же число (умножить на одно и то же число, отличное от нуля), то равенство останется верным.

Так как разность и частное единственны в том случае, когда они существуют, то аналогичные утверждения имеют место и для этих операций:

- если из обеих частей равенства вычесть одно и то же число (разделить на одно и то же отличное от нуля число), то равенство останется верным.

В то же время для вычитания и деления выполняются свойства (2.4–2.7):

$$\begin{aligned} (a + b) - a &= b; & b + (a - b) &= a; \\ (a \cdot b) : a &= b; & b \cdot (a : b) &= a. \end{aligned}$$

Указанные свойства позволяют заключить, что уравнения:

$$\begin{aligned} a + x &= b \text{ равносильно } (a + x) - a = b - a \text{ и равносильно } x = b - a; \\ a - x &= b \text{ равносильно } (a - x) + x = b + x \text{ и равносильно } a = b + x; \\ x - a &= b \text{ равносильно } (x - a) + a = b + a \text{ и равносильно } x = b + a; \end{aligned}$$

$a \cdot x = b$ равносильно $(a \cdot x) : a = b : a$ и равносильно $x = b : a$;

$a : x = b$ равносильно $(a : x) \cdot x = b \cdot x$ и равносильно $a = b \cdot x$;

$x : a = b$ равносильно $(x : a) \cdot a = b \cdot a$ и равносильно $x = b \cdot a$.

Рассмотрим пример. Требуется решить уравнение $x - 124 = 783$.

Прибавим к обеим частям уравнения 124, получим

$$(x - 124) + 124 = 783 + 124;$$

$$x = 783 + 124;$$

$$x = 907.$$

Сделаем проверку: $907 - 124 = 783$. Значит, $x = 907$.

Уравнение $326 - x = 112$ решается так:

$$(326 - x) + x = 112 + x;$$

$$326 = 112 + x,$$

$$\text{или } 326 = x + 112.$$

Вычтем из обеих частей уравнения 112, получим

$$326 - 112 = (x + 112) - 112,$$

$$\text{отсюда } 326 - 112 = x,$$

$$x = 214.$$

Проверяем: $326 - 214 = 112$.

Аналогично можно решить уравнение $51 : x = 3$.

$$(51 : x) x = 3 x$$

или

$$51 = 3 x,$$

$$\text{отсюда } 51 : 3 = (x \cdot 3) : 3 \text{ или}$$

$$51 : 3 = x, \quad x = 17.$$

Проверяем: $51 : 17 = 3$.

Без изменений этот способ переносится и на более сложные уравнения. Например, уравнение

$$2 \cdot x + 7 = 23 \text{ решается так:}$$

$$(2 \cdot x + 7) - 7 = 23 - 7;$$

$$2 \cdot x = 16,$$

деля обе части уравнения на 2, получаем $x = 8$.

Проверяем: $2 \cdot 8 + 7 = 16 + 7 = 23$.

Достоинства этого метода решения уравнений в том, что он без изменений применяется в дальнейшем обучении. Кроме того, объясняет, почему любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения и любого равенства в другую его часть с «обратным» знаком, почему обе части равенства и, вообще любого выражения, можно разделить или умножить на любое, отличное от нуля, число.

Для поиска решения простейших уравнений можно также использовать тот факт, что операции вычитания и деления, обратные к сложению и умножению. Из него следует, что равенства $a + b = c$, $c - a = b$ и $c - b = a$ одновременно выполняются. Также одновременно выполняются и равенства $a \cdot b = c$, $c : b = a$, $c : a = b$.

Это значит, что каждое из трех указанных равенств является следствием любого другого, т.е. из истинности одного из них следует истинность двух оставшихся.

Отсюда следует, что истинность равенства $5 + x = 8$ влечет истинность равенств $8 - x = 5$ и $8 - 5 = x$, следовательно, уравнения $5 + x = 8$ и $8 - x = 5$ имеют одно и то же решение: $x = 8 - 5$.

На основании данного утверждения уравнение $255 : x = 17$ можно решать так: равенство, справедливое при тех же значениях x , есть $255 : 17 = x$, $x = 15$.

Проверяем: $255 : 15 = 17$.

Несмотря на то, что умение решать уравнения само по себе важно, значение уравнений выявляется только тогда, когда они применяются для решения задач практического содержания, т.е. выступают как метод моделирования конкретных фрагментов действительности. Приведем пример.

У шофера две одинаковые канистры с бензином. Обе неполные. В одной не хватает 8 л, а в другой — 4 л. Чтобы освободить одну из канистр, шофер перелил весь бензин в одну канистру, но она осталась неполной. В ней не хватило 2 л. Какова вместимость каждой канистры?

Предметом задачи являются объемы, измеренные в литрах. Этих величин 7:

- объем каждой канистры (величина неизвестная);
- объем незаполненной части I канистры (величина известная);
- объем незаполненной части II канистры (величина известная);
- объем заполненной части I канистры (величина неизвестная);
- объем заполненной части II канистры (величина неизвестная);
- объем заполненной части одной из канистр (будем считать I канистру) после того, как в нее слили весь бензин (величина неизвестная);
- объем незаполненной части I канистры после переливания (величина известная).

Из 7 величин 3 известны, а 4 неизвестны. Причем объем каждой канистры — искомая величина. Обозначим искомую величину x и построим вспомогательную модель задачи, наглядно представляющую зависимость между величинами (рис. 170).

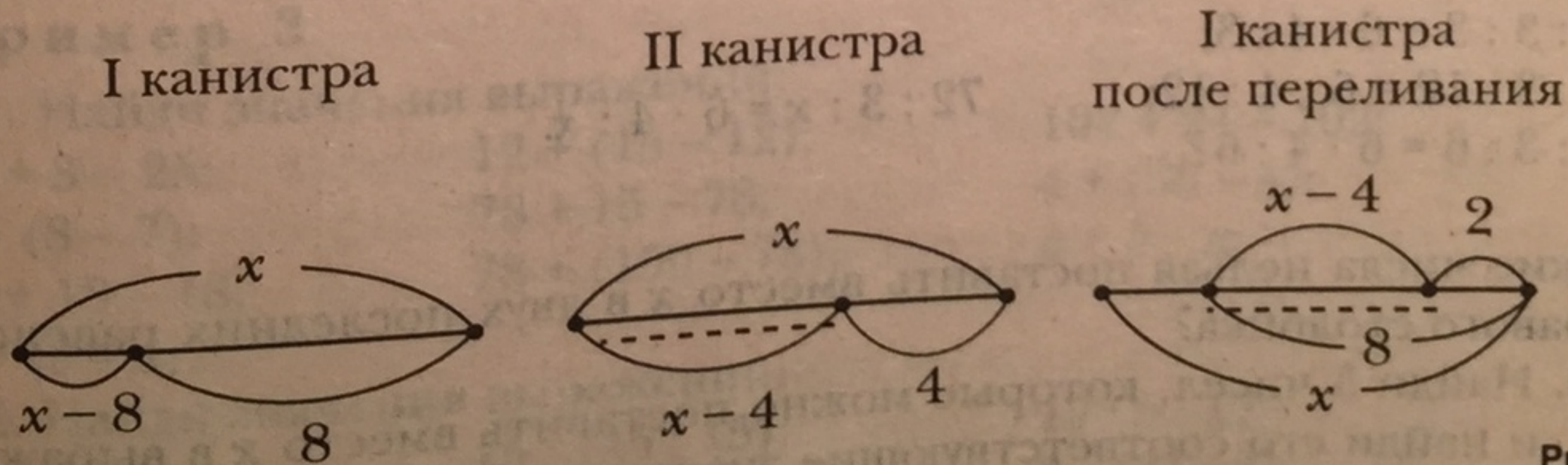


Рис. 170

Из рисунка видно, что объем I канистры можно представить в виде суммы объемов $x - 8$, $x - 4$, 2 . Или объем той части канистры, которая оставалась незаполненной, т.е. 8 л, можно представить в виде суммы объ-

емов $x - 4$ и 2 , а значит, $x - 4 = 8 - 2$ или $x - 4 = 6$. Решение этого уравнения есть искомая величина, следовательно, $x = 10$.

Проверяем решение задачи. Имеем: в I канистре было $10 \text{ л} - 8 \text{ л} = 2 \text{ л}$, во II канистре было $10 \text{ л} - 4 \text{ л} = 6 \text{ л}$, в I после переливания стало $2 \text{ л} + 6 \text{ л} = 8 \text{ л}$ и, значит, не хватало $10 \text{ л} - 8 \text{ л} = 2 \text{ л}$, т.е. в I канистре после переливания не хватало 2 л , что соответствует условию.

О т в е т: каждая канистра имеет объем 10 л .

Следующие примеры показывают, как может быть организована познавательная деятельность младших школьников, направленная на овладение понятиями «уравнение», «решение уравнения» и методами решения простейших уравнений.

Пример 1

1.1. Сравни выражения:

$$12 + 0; 12 + 2; 12 + 5; 12 + 8; 12 + 20; 12 + 28; 12 + 100.$$

Найди значения каждого из этих выражений.

Можно ли записать все эти выражения как $12 + x$?

Придумай еще выражения, которые так же можно записать.

Каким числом заменили x в выражении $12 + x$, если получили равенства:

$$12 + x = 12 + 5, 12 + x = 12 + 34, 12 + x = 12 + 370?$$

1.2. Верны ли равенства:

$$72 : 3 = 6 \cdot 4;$$

$$72 : 3 + 5 = 6 \cdot 4 + 5;$$

$$72 : 3 + 20 = 6 \cdot 4 + 20; \quad 72 : 3 + x = 6 \cdot 4 + x;$$

$$72 : 3 + 16 = 6 \cdot 4 + 16;$$

$$72 : 3 \cdot 2 = 6 \cdot 4 \cdot 2;$$

$$72 : 3 \cdot 5 = 6 \cdot 4 \cdot 5; \quad 72 : 3 \cdot x = 6 \cdot 4 \cdot x;$$

$$72 : 3 \cdot 10 = 6 \cdot 4 \cdot 10;$$

$$72 : 3 - 4 = 6 \cdot 4 - 4;$$

$$72 : 3 - 20 = 6 \cdot 4 - 20; \quad 72 : 3 - x = 6 \cdot 4 - x;$$

$$72 : 3 - 12 = 6 \cdot 4 - 12;$$

$$72 : 3 : 3 = 6 \cdot 4 : 3;$$

$$72 : 3 : 12 = 6 \cdot 4 : 12; \quad 72 : 3 : x = 6 \cdot 4 : x.$$

$$72 : 3 : 6 = 6 \cdot 4 : 6?$$

Какие числа нельзя поставить вместо x в двух последних равенствах из правого столбика?

1.3. Найди 5 чисел, которые можно поставить вместо x в выражение $8 - x$, и найди его соответствующие значения. Найди 5 чисел, которые нельзя поставить в это выражение вместо x .

1.4. Найди 4 числа, которые можно поставить вместо x в выражение $12 : x$, и найди его соответствующие значения. Найди 4 числа, которые нельзя поставить в это выражение вместо x .

Пример 2

2.1. Найди значения данных выражений при указанных значениях x .
Заполни таблицу:

x	0	2	4	5
$12 + x$				
$15 - x$				
$3 \cdot x$				
$120 : x$				

2.2. Заполни таблицу. Найди такое число, заменяющее x , при котором оба выражения равны.

x	5	6	9	10
$22 - x$				
$4 + x$				

2.3. Ничего не вычисляя, найди равные выражения и запиши равенства:

$$54 : 6 + 12 = 3 \cdot 3 + 12; \quad (102 - 90) : 2 = 12 : 2$$

$$(12 + 15) \cdot 3 = (36 - 9) \cdot 3; \quad 12 \cdot 7 - 3 = (99 - 15) - 3.$$

2.4. Найди значения выражения $28 - x$ при $x = 0$, $x = 15$, $x = 16$, $x = 18$.

При каком значении x выражение $28 - x = 12$?

2.5. Найди значения выражения $x + 17$ при $x = 5$, $x = 7$, $x = 10$, $x = 12$.

При каком значении x выражение $x + 17 = 24$?

2.6. Найди значения выражения $36 : x$ при $x = 2$, $x = 6$, $x = 3$, $x = 12$.

При каком значении x выражение $36 : x = 4$?

2.7. Найди значения выражения $12 \cdot x$ при $x = 2$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 10$.

При каком значении x выражение $12 \cdot x = 12$?

2.8. Найди значения выражения $x - 8$ при $x = 10$, $x = 15$, $x = 30$, $x = 18$.

При каком значении x выражение $x - 8 = 4$?

2.9. Найди значения выражения $x : 5$ при $x = 0$, $x = 5$, $x = 15$, $x = 10$.

При каком значении x выражение $x : 5 = 20$?

Пример 3

3.1. Найди значения выражений:

$$25 + 3 - 25; \quad 12 + (15 - 12); \quad 102 + 24 - 102;$$

$$7 + (8 - 7); \quad 78 + 15 - 78; \quad 4 + (36 - 4);$$

$$16 + 18 - 18; \quad 78 + (150 - 78); \quad a + b - a;$$

$$a + (b - a).$$

3.2. Найди значения выражений:

$$2 \cdot 3 : 2; \quad 15 \cdot (45 : 15); \quad 17 \cdot 5 : 17;$$

$$12 \cdot (36 : 12); \quad 36 \cdot 3 : 36; \quad 3 \cdot (21 : 3);$$

$$172 \cdot 4 : 172; \quad 4 \cdot (28 : 4); \quad a \cdot b : a; \quad a \cdot (b : a).$$

3.3. Найди, какому выражению равны данные выражения. Запиши равенства:

$$13 + x - 13; \quad 54 + (x - 54); \quad 18 \cdot x : 18;$$

$$12 \cdot (x : 12); \quad 72 + x - 72; \quad 7 + (x - 7);$$

$$101 \cdot x : 101; \quad 53 \cdot (x : 53).$$

3.4. Найди значение x , при котором справедливы следующие равенства:

$$x + 2 - 2 = 5 - 2; \quad x \cdot 5 : 5 = 30 : 5; \quad x - 3 + 3 = 15 - 3;$$

$$x + 7 - 7 = 12 - 7; \quad x \cdot 8 : 8 = 64 : 8; \quad x - 12 + 12 = 26 - 12.$$

3.5. Найди значения выражений:

$$12 - x + x; \quad 15 : x \cdot x; \quad 34 + x - x; \quad 47 \cdot x : x;$$

$$27 - x + x; \quad 108 : x \cdot x; \quad 28 + x - x; \quad 76 \cdot x : x.$$

3.6. К обеим частям данных равенств прибавь такое число, чтобы получить выражение, равное x :

$$x - 5 = 7; \quad x - 12 = 3; \quad x - 21 = 5; \quad x - 4 = 16.$$

3.7. Из обеих частей данных равенств вычти такое число, чтобы получить выражение, равное x :

$$x + 4 = 8; \quad x + 17 = 20; \quad x + 9 = 18; \quad x + 15 = 30.$$

3.8. Обе части данных равенств умножь на такое число, чтобы получить выражение, равное x :

$$x : 2 = 8; \quad x : 5 = 3; \quad x : 10 = 4; \quad x : 21 = 3.$$

3.9. Обе части данных равенств раздели на такое число, чтобы получить выражение, равное x :

$$x \cdot 5 = 30; \quad x \cdot 6 = 12; \quad x \cdot 7 = 21; \quad x \cdot 12 = 36.$$

3.10. Запиши еще два верных равенства, если данные равенства справедливы:

$$12 + 24 = 36; \quad 78 + 102 = 180; \quad 84 + 220 = 304; \quad a + b = c;$$

$$17 + x = 20; \quad x + 5 = 12; \quad x + 8 = 29; \quad 27 + x = 32.$$

3.11. Запиши еще два верных равенства, если данные равенства справедливы:

$$17 - 4 = 13; \quad 38 - 15 = 23; \quad 74 - 25 = 49; \quad a - b = c;$$

$$20 - x = 5; \quad x - 7 = 14; \quad x - 5 = 83; \quad 97 - x = 50.$$

3.12. Запиши еще два верных равенства, если данные равенства справедливы:

$$7 \cdot 8 = 56; \quad 12 \cdot 4 = 48; \quad 16 \cdot 2 = 32; \quad 42 \cdot 12 = 504;$$

$$5 \cdot x = 20; \quad x \cdot 7 = 42; \quad x \cdot 12 = 48; \quad 17 \cdot x = 51.$$

3.13. Запиши еще два верных равенства, если данные равенства справедливы:

$$12 : 6 = 2; \quad 56 : 7 = 8; \quad 105 : 5 = 21; \quad a : b = c;$$

$$24 : x = 6; \quad 72 : x = 24; \quad x : 8 = 7; \quad x : 16 = 10.$$

3.14. Найди, при каком значении переменной x следующие равенства справедливы, т.е. реши уравнения, записанные этими равенствами. Каждое уравнение реши тремя способами:

а) подбери подходящее число;

б) запиши равенство, которое выполняется одновременно с данным;

в) прибавь (вычти, умножь, раздели) к обеим частям равенства одно и

то же число:

$$x + 17 = 20; \quad x - 6 = 13; \quad x \cdot 3 = 42; \quad x : 6 = 54.$$

3.15. Реши уравнения таким способом, который нравится тебе или является более простым:

$$29 + x = 32; \quad 6 - x = 4; \quad 12 \cdot x = 36; \quad 72 : x = 12.$$

§ 3. Принципы построения системы обучения младших школьников элементам геометрии

Проблемы изучения элементов геометрии младшими школьниками являются в настоящее время объектом пристального внимания как в нашей стране, так и за рубежом. Например, на 6-м Международном конгрессе по математическому образованию (1988) отмечалось, что математическое образование «будущего» должно начинаться с изучения элементов геометрии и предшествовать знакомству с арифметикой.

Это обусловлено целым рядом причин. Отметим важнейшие из них. С точки зрения психологов школы А.В.Запорожца¹ формы осознания ребенком действительности начинаются с активного взаимодействия с окружающим миром, в первую очередь с ориентировочных действий и движений относительно окружающих его предметов, т.е. с освоения доступного для восприятия пространства. При этом первоначально выделяются предметы, которые характеризуются физической определенностью, перцептуальной наглядностью и выделяемостью из среды, а главное, как считал Ж.Пиаже, стабильностью, т.е. тождественностью самому себе во времени и пространстве.

На такой основе формируются первые представления о пространстве как о чем-то расстилающемся перед человеком во все стороны среды, в которой можно перемещаться и перемещать доступные предметы. Постепенно эти представления наполняются все более сложным содержанием. Это значит, что первоначальную интеллектуальную деятельность ребенка можно рассматривать как геометрическое познание. Именно с таким опытом интеллектуальной деятельности он и приходит в школу, где этот опыт благополучно игнорируется, так как обучение начинается с арифметики, требующей совершенно иных познавательных стратегий.

С другой стороны, те элементы геометрии, которые, как правило, включаются в курс начальной математической подготовки, являются элементами планиметрии и сводятся к изучению простейших метрических свойств плоских фигур. Но большинство исследователей детской психологии (Ж.Пиаже, Б.Г.Ананьев, М.В.Вовчик-Блакитная, В.И.Зыкова и др.) считают, что естественный ход развития геометрических представлений детей идет от представлений о качественных свойствах геометрических фигур к количественным, т.е. от геометрии «формы и положения» к геометрии «меры». Вследствие чего пространственное мышление детей оказывается недостаточно развитым и ведет к значительным трудностям в усвоении систематического курса геометрии. Но изучение геометрии в начальной школе может не только способствовать развитию пространственного мышления, но и внести существенный вклад в развитие образного мышления, включающего владение такими интеллектуальными процедурами, как представительство, вращение, трансформация.

В историческом аспекте математика как наука оформилась как наука геометрическая. Так, в «Началах» Евклида даже арифметика представля-

¹ Запорожец А.В. Избранные психологические труды. — М., 1986. — Т. 1.

на в геометризованном виде. Собственно геометрическое знание мыслилось при этом как знание о том реальном пространстве, которое окружает человека. Современная наука различает пространство как среду обитания от пространств концептуальных: физических, геометрических, ментальных и пр.

В школьном курсе геометрии изучается евклидово геометрическое пространство, однородное во всех своих «местах», причем заполняющие его объекты, вообще говоря, изначально не даны, но «конструируются» из тех однородных элементов, которые его составляют. Евклидова геометрия изучает, главным образом, свойства геометрических фигур, которые остаются неизменными при любых «перемещениях» (движениях) этих фигур. Если треугольник как угодно перемещать в евклидовом пространстве, то неизменными останутся длины его сторон, величины углов, величина его площади и т.д. Но движение в геометрическом пространстве не есть перемещение в физическом смысле, а является математическим преобразованием, т.е. вполне определенным соответствием между точками такого пространства.

Дальнейшее развитие геометрии показало, что геометрические фигуры обладают и другими свойствами, существенно отличающимися от метрических и характеризующимися своеобразной замкнутостью и устойчивостью. Эти свойства оказались связанными не с измерениями, а с качественным характером взаимного расположения и изменения формы фигур. Например, было замечено, что при перспективных изображениях не сохраняются ни размеры, ни форма изображаемых предметов, но тем не менее перспективные изображения несут определенную информацию о них. Свойства геометрических фигур, которые сохраняются при любых центральных проектированиях, получили название *проективных*. Наглядно они проявляются, например, при изменении вида предмета, если его рассматривать с разных точек зрения и с различных расстояний.

Геометрическую фигуру можно равномерно «растягивать или сжимать» в некотором определенном направлении. Те свойства, которые при таком преобразовании сохраняются, называют *аффинными*. Если представить, например, параллелограмм, выполненным из растяжимого материала, то равномерным сжатием или растяжением его можно преобразовать в квадрат, ромб, прямоугольник, но нельзя преобразовать в трапецию.

Если дальше углубляться в природу геометрических образов, можно заметить свойства, настолько прочно связанные с данной фигурой, что они остаются неизменными при любых ее искажениях, если только эти искажения не приводят к «разрыву и склеиванию» частей фигуры. Такие свойства называются *топологическими*. Для простейших фигур топологические свойства отличаются исключительной наглядностью. Например, очевидно, что всякая линия на плоскости, которую можно получить, деформируя окружность без разрывов и склеиваний (т.е. деформируя непрерывно), разбивает плоскость на две части, одна из которых лежит внутри этого контура, а другая — вне его, каким бы извилистым он ни

был. Поэт
топологич
Если ин
геометрич
мыслить п
только эт
ственно н
ном, топо
В 1872
финной и
ения: мож
ства фигур
ниях. При
ется такое
ства, при
каждой то
дой точки
единствен
Но элем
определен
зования, ко
из таких о
Преобразо
ми, называ
которые неко
Если вме
образовани
гой с помо
свойства ф
совокупнос
рефлексив
любая сово
ния тех ил
зований пр
1) в сово
такое, кото
2) вместо
в совокупн
щее F_1 в F ;
3) в сово
зований эт
няется пре
Легко ви
ям. Любую
Клейн Ф. С
ометрии. — М.,

был. Поэтому свойство окружности — делить плоскость на две части — топологическое.

Если интересоваться, например, только проективными свойствами геометрических фигур, отвлекаясь от всех иных их свойств, то можно мыслить пространство, в котором все геометрические фигуры обладают только этими свойствами и никакими другими. Такое пространство естественно назвать *проективным*. Аналогично можно говорить об аффинном, топологическом или метрическом пространстве.

В 1872 г. Ф.Клейн¹, суммируя результаты развития проективной, аффинной и других геометрий, сформулировал общий принцип их построения: можно рассматривать любые преобразования и исследовать те свойства фигур, которые остаются неизменными при данных преобразованиях. При чем преобразованием геометрического пространства называется такое взаимно-однозначное соответствие между точками пространства, при котором у каждой точки в точности имеется один образ и у каждой точки в точности имеется один прообраз. Иными словами, у каждой точки есть единственная, ей соответствующая, и у каждой точки есть единственная такая, которой эта точка поставлена в соответствие.

Но элементы множеств, рассматриваемых в геометрии, находятся в определенных отношениях. Это заставляет рассматривать такие преобразования, которые не нарушают выделенных отношений. Например, одним из таких отношений является расстояние между любыми двумя точками. Преобразования, которые сохраняют расстояния между любыми точками, называются *движениями*. При этом равными называются фигуры, которые некоторым движением можно «перевести» одну в другую.

Если вместо движений выбрать какую-нибудь другую совокупность преобразований и объявить «равными» фигуры, получающиеся одна из другой с помощью преобразований этой совокупности, то можно изучать те свойства фигур, которые не меняются при любых преобразованиях этой совокупности. Ясно, что введенное таким образом равенство должно быть рефлексивным, симметричным и транзитивным. Отсюда следует, что не любая совокупность преобразований может быть взята за основу изучения тех или иных свойств. На рассматриваемую совокупность преобразований приходится накладывать следующие требования:

- 1) в совокупность должно входить тождественное преобразование, т.е. такое, которое каждую точку пространства переводит в себя;
- 2) вместе с каждым преобразованием π , переводящим фигуру F в F_1 , в совокупность должно входить «обратное» преобразование, переводящее F_1 в F ;
- 3) в совокупность должно входить произведение любых двух преобразований этой совокупности π_1 и π_2 , состоящее в том, что сначала выполняется преобразование π_1 , затем преобразование π_2 .

Легко видеть, что совокупность движений удовлетворяет этим условиям. Любую совокупность преобразований, удовлетворяющую данным ус-

¹ Клейн Ф. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований // Об основаниях геометрии. — М., 1956. — С. 399–434.

ловиям, называют *группой*. В связи с этим принцип Клейна уточняется следующим образом:

можно рассматривать любую группу преобразований пространства и исследовать те свойства фигур, которые сохраняются при преобразованиях этой группы.

Именно так он был сформулирован самим Клейном и стал известен в истории математики под названием Эрлангенской программы.

Таким образом, разные группы преобразований как бы «расслаивают» пространство, выделяя те или иные свойства геометрических фигур. Причем наиболее устойчивыми оказываются топологические свойства, они сохраняются и при проективных, и при аффинных, и при метрических преобразованиях, а наименее устойчивыми — метрические свойства.

С точки зрения обучения геометрии младших школьников чрезвычайно важным является факт, отмечаемый психологами и состоящий в том, что дети сначала выделяют именно топологические свойства, затем — проективные и только потом — метрические. Значит, обучение, соответствующее естественному ходу развития геометрических представлений ребенка, также должно начинаться с уточнения представлений о топологических свойствах и взаимном расположении тел в пространстве.

Геометрические пространства обладают еще одной важнейшей характеристикой — размерностью. Так, евклидово геометрическое пространство, изучаемое в школе, имеет три измерения, а каждая фигура в этом пространстве не может иметь более трех измерений, но может иметь меньшее число измерений, т.е. 2, 1, 0. Например, точка имеет 0 измерений, линия — 1 измерение, поверхность — 2, а тело — 3 измерения. В связи с этим отметим, что еще Н.И.Лобачевский указывал на методическую целесообразность построения системы обучения геометрии на принципе фузионизма, т.е. на одновременном и взаимосвязанном изучении как трехмерных, так и фигур меньшей размерности, в отличие от традиционно сложившейся системы обучения, при которой изучению стереометрии предшествует изучение планиметрии. При обучении младших школьников этот принцип позволяет в максимальной степени использовать их дошкольный опыт.

Геометрия имеет своим предметом пространственные формы в «чистом виде», ее методы только умозрительны. Но при первоначальном знакомстве с геометрией неизбежна опора на наглядные представления. «Наглядное понимание играет первенствующую роль в геометрии. Руководствуясь непосредственным созерцанием, можно уяснить многие геометрические факты, а также увидеть богатство содержащихся в ней идей и методов исследования»¹. При изучении геометрии младшими школьниками недостаточно опираться только на непосредственное созерцание. Наглядное обучение геометрии в начальной школе должно обеспечить учащимся возможность оперировать предметными моделями идеальных геометрических фигур, выявлять геометрические факты методами физического эксперимента. Любое новое знание должно быть

¹ Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.-Л., 1936. — С. 5.

получено в процессе активных действий самого ребенка, а не ограничиваться наблюдениями за действиями других. Организованная на такой основе познавательная деятельность позволяет ему думать «руками и глазами», практически преобразуя предмет изучения в соответствии с поставленной целью.

На всех этапах изучения геометрии в школе учащиеся имеют дело с графическими моделями геометрических фигур, реализованными на плоском листе бумаги. Отсюда следует, что предъявляемые ученику изображения геометрических фигур должны наилучшим образом отвечать задаче формирования пространственных представлений, что предполагает необходимость обучения умению «читать» графическую информацию и умению изображать геометрический объект, заданный другими способами, например, вербальным описанием или предметной моделью, изготовленной из тех или иных вещественных материалов.

Таким образом, обучение младших школьников элементам геометрии должно:

- соответствовать естественному ходу развития их геометрических представлений;
- рассматривать геометрию как органическую часть математики и, следовательно, как необходимую составляющую начального математического образования;
- соответствовать историческому ходу становления математической науки;
- выделять геометрические фигуры в направлении сверху вниз, от трехмерных к двумерным и одномерным;
- выявлять геометрические факты в процессе практической работы с моделями геометрических фигур, что предполагает обязательным включать в процесс познания не только зрительные и слуховые, но и кинестические рецепторы;
- вырабатывать умение оперировать графической информацией;
- подготавливать учащихся к усвоению систематического курса геометрии;
- изучать свойства геометрических фигур на основе принципа фузионизма.

Для подробного ознакомления с теорией и методикой обучения младших школьников элементам геометрии мы отсылаем читателя к работам автора.

Литература

- Адамар Ж. Исследование психологии изобретения в области математики. — М., 1970.
- Вернье Ж. Ребенок, математика и реальность. — М., 1998.
- Величковский Б.М., Капица М.С. Психологические проблемы изучения интеллекта // Интеллектуальные процессы и их моделирование. — М., 1987.
- Гнеденко Б.В. О математике. — М., 2000.
- Гнеденко Б.В., Черкасов Р.С. О преподавании математики в предстоящем тысячелетии // Математика в школе. — 1966. — № 1.
- Давыдов В.В. Виды обобщения в обучении. — М., 1972.
- Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. — М., 1988.
- Папи Ф., Папи Ж. Дети и графы. — М., 1974.
- Папи Ж. Геометрия в современном преподавании // Математика в школе. — 1967. — № 1.
- Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления // Преподавание математики. — М., 1960.
- Пиаже Ж. Как дети образуют математические понятия // Вопросы психологии. — 1966. — № 4.
- Пойа Д. Как решать задачу. — М., 1961.
- Стойлова Л.П. Математика. — М., 2000.
- Чуприкова Н.И. Умственное развитие и обучение. — М., 1995.

Оглавление

Введение. Общая характеристика познавательной деятельности младших школьников в процессе обучения математике	3
Глава I. ОБУЧЕНИЕ АРИФМЕТИКЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ	
§ 1. Дочисловой период в обучении математике	8
§ 2. Раскрытие смысла понятия «количественное число»	19
§ 3. Раскрытие смысла понятия «порядковое число»	37
§ 4. Число как мера величины	47
§ 5. Принципы построения позиционной системы счисления	61
§ 6. Обучение нумерации натуральных чисел	76
§ 7. Свойства арифметических действий и их изучение в начальной школе	92
§ 8. Текстовые арифметические задачи	106
Глава II. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ НАЧАЛЬНЫХ КЛАССОВ	
§ 1. Тожественные преобразования арифметических выражений	127
§ 2. Способы решения уравнений	131
§ 3. Принципы построения системы обучения младших школьников элементам геометрии	139
Литература	144

а
е
ОВ
7.-
//
и.-

.....3

.....8
.....19
.....37
.....47

.....61
.....76

.....92
.....106

.....127
.....131
.....139
.....144

72.00

Издательство
«Школьная Пресса»
представляет:

Худадатова С.С. Математика
в ребусах, чайнвордах,
криптограммах, 5-9 классы.

Издание представляет собой комплект из пяти брошюр, каждая из которых составлена на основе учебного материала определенного класса. Объем брошюры 30 страниц, формат 140х200 мм, обложка.

Книжки содержат веселые, увлекательные задания, рисунки, полезные советы. Они помогут учителю оживить и разнообразить урок, пробудить в детях интерес к прекрасной науке, проверить, как усвоены знания. Нестандартные упражнения будут способствовать развитию памяти и логического мышления у школьников.

Книги можно заказать по системе **«Книга-почтой»** или приобрести в киоске при издательстве по адресу:

127254, Москва, ул. Руставели, д.10, корп.3.
Т/ф: (095) 219-52-87, 219-52-89,
219-83-80, 979-73-03.

E-mail: marketing@shoolpress.ru
Интернет: www.shoolpress.ru

ISBN 5-9219-0171-7



9 785921 901711 >

*Школьная
Пресса*

Индекс:
81498



**ВСЕГДА
не верьте
тому что
кажется,
верьте
ТОЛЬКО
доказательствам.**



Чарльз Диккенс. «Большие надежды» 1861 г.